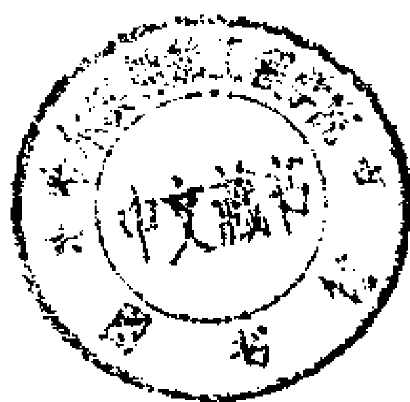
大学应用数学丛书

应用复分析

任福尧　编著



复旦大学出版社

（沪）新登字 202 号



责任编辑　范仁梅
责任校对　张利勇

[illegible]分析
[illegible]福[illegible]
复旦大学出版社出版
（上海国[illegible]路579号）
新华书店上海发行所发行　江苏东台印刷厂印刷
开本 850×1168　1/32　印张 12　　字数 353,000
1993 年 12 月第 1 版　1993 年 12 月第 1 次印刷
印数 1—4,500
ISBN7-309-01278-X/O·130
定价：12.00元

内 容 简 介

本书既系统地讲述了复变函数的基本理论和方法，又有重点地讲述了复分析的一些应用。主要内容有解析函数、柯西积分公式、留数定理及其应用、共形映照及其一些应用、整函数与亚纯函数、拉普拉斯变换和 Z-变换及其应用。各章都配有大量的应用性习题。

本书主要以综合性大学、理工科大学和师范大学的应用数学专业、控制论专业、运筹学专业、应用力学专业、计算数学和数学专业等高年级大学生为主要读者，也可供教师和从事科学研究的工程技术人员参考。



出版者的话

近年来，随着我国现代化建设事业的发展，许多高等学校创办了一大批重视数学理论和应用的专业和系科。如应用数学、应用力学、计算数学、控制科学、信息科学、系统科学、运筹学、统计学、计算机科学、应用物理、管理科学等。为了满足这类专业数学教学的需要，我们组织编写和出版了一套“大学应用数学丛书”。本书即为这套丛书中的一本。

“大学应用数学丛书”重视现代数学的基本理论，强调数学的实际应用，反映现代科技的先进成果，并便于课堂教学和自学。我们希望，这套丛书的出版将有助于我国应用数学教学与研究的展开，促进数学更好地为国民经济和现代化建设服务。

在组织编写这套丛书的过程中，我们曾得到陈开明、陈有根、柳兆荣、徐公权等同志的热情帮助，在此特表谢忱。

复旦大学出版社

1987年1月

序　言

本书是在本人过去编写并讲授过多次的《管路传输中的数学方法》（1974 年）、《复变函数方法及其应用》（1983 年）和《应用复分析》（1988 年）的基础上撰写而成的。

本书系统地讲述了复变函数的基本理论和方法，又有重点地讲述了复分析在流体管路传输、稳定性准则、迪利希莱等边值问题和计算积分等方面的应用。本书所遵循的指导原则是：所有的定义、定理等的叙述和证明都应当是清晰、精确的；应用的思想和内容应贯串于全书之中。由于积分变换在工程技术中有广泛的应用，本书讲述了拉普拉斯变换和Z-变换。

全书共分七章。第一章是解析函数，主要讲述了解析函数、幂级数和初等解析函数，特别着重讲述了如何找出多值函数的支点以及在什么样的区域内多值函数可以分出单值解析分支，并列举了若干例子，此外还讲述了调和函数在热传导、流体流动、静电场和渗流理论中的应用。

第二章是柯西积分公式，主要讲述了柯西积分公式和用级数表示解析函数，还讲述了解圆上和半平面上的迪利希莱问题的泊松积分公式。

第三章是留数定理与应用，主要讲述了留数定理、幅角原理、儒歇定理和利用留数定理计算积分，此外，还讲述了多项式的零点全位于单位圆内与全位于左半平面内的劳斯-霍尔维茨稳定性准则和尼奎斯特稳定性准则，以及多项式的零点关于其系数的连续依赖性。

第四章是共形映照及其一些应用，主要讲述了初等共形映照和许瓦茨-克利斯托否公式，此外还讲述了应用共形映照解迪利希莱问题和以流线为边界的边值问题。

第五章是整函数与亚纯函数，主要讲述了无穷乘积、魏尔斯特拉斯因子分解定理、阿达玛定理、Γ 函数和亚纯函数展开为部分分式，此外还讲述了无穷乘积在流体管路传输中的应用。

第六章是拉普拉斯变换及其应用，主要讲述了拉普拉斯变换及其在求解微分方程中的应用，此外还系统地讲述了在流体传输中的应用。

第七章是Z-变换及应用，主要讲述了Z-变换及其在解常系数差分方程中的应用，此外还讲述了它在脉冲系统的传输函数和输出特性中的应用。

每章后面配有足够数量的习题。这些习题主要是计算性和应用性的，为了灵活运用和牢固掌握所学的理论和方法，也有适量的习题是理论性的。

本书可作为综合性大学、理工科大学和师范大学的应用数学专业、控制论专业、运筹学专业、应用力学专业、计算数学专业和数学专业的教材，也可供教师和从事应用科学研究的工程技术人员参考。各专业可根据各自的需要和兴趣有选择地进行教学。

本书是应复旦大学《应用数学丛书》编委会主编谷超豪教授的建议而编写的，在此对他表示感谢。

书中难免有缺点、错误和不足之处，希望大家批评指正。

任福尧

1993 年 8 月于复旦大学

目　录

第一章 解析函数

§1 复　数

1.1 复数

称 $z=x+iy$ 这种式子的数为**复数**，其中 x 和 y 是任意的实数，$i=\sqrt{-1}$ 是虚数单位。实数 x 和 y 分别称为复数 z 的实部和虚部，记为

$$x=\mathrm{Re}z,$$

$$y=\mathrm{Im}z。$$

特别，当 $x=0$ 时，$z=0+iy$ 就简记作 iy，称为纯虚数；当 $y=0$ 时，$z=x+i0$ 就是实数 x。

一、复数的相等

两个复数当且仅当它们的实部和虚部分别相等时，我们才认为这两个复数相等，即 $x_1+iy_1=x_2+iy_2$ 等价于

$$x_1=x_2,\quad y_1=y_2。$$

二、复数的运算

1．若 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$，我们有下列定义：

(1)　$z=z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$；　(1-1)

(2)　$-z=-x-iy$；

(3)　$z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$；

(4)　$z=z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$。　(1-2)

2．由上述定义，我们容易证明下述代数的基本定律是全满足的：

(1) **加法的交换律和结合律**

$$z_1+z_2=z_2+z_1;$$

$$z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3=z_1+z_2+z_3。$$

(2) 乘法的交换律和结合律

$$z_1z_2=z_2z_1;$$

$$z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3=z_1z_2z_3。$$

(3) 分配律

$$(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3。$$

作为证明方法的例子，我们证明乘法的交换律成立（其它可类似地证明）：

$$\begin{aligned}z_1z_2&=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)\\&=(x_2x_1-y_2y_1)+\mathrm{i}(x_2y_1+x_1y_2)=z_2z_1。\end{aligned}$$

我们已经看到，如上所定义的复数服从实数的代数基本定律，因此，它们的代数与实数的代数在形式上是完全相同的，虽然在意义上它们是不完全相同的。

三、复数的模

若 $z=x+\mathrm{i}y$，我们定义 $+\sqrt{x^2+y^2}$ 为复数 z 的模，记作 $|z|$。从定义立即知道，$|z|=0$ 当且仅当 $x=0$ 和 $y=0$。

我们注意到，在复数中是没有次序的，"大于"或"小于"等词用到复数上是没有意义的。不等式只能出现在复数的模之间的关系中。

四、复数除法的定义

考虑方程 $z\zeta=z'$，其中 $z=x+\mathrm{i}y$，$\zeta=\xi+\mathrm{i}\eta$，$z'=x'+\mathrm{i}y'$，则我们有

$$(x\xi-y\eta)+\mathrm{i}(x\eta+y\xi)=x'+\mathrm{i}y',$$

于是
$$x\xi-y\eta=x',\quad x\eta+y\xi=y',$$

对 ξ 和 η 求解，若 $|z|\neq0$，则得

$$\xi=\frac{yy'+xx'}{x^2+y^2},\qquad \eta=\frac{xy'-x'y}{x^2+y^2}。\tag{1-3}$$

因此，若 $|z|\neq0$，则有唯一解 ζ，$\zeta=\xi+\mathrm{i}\eta$ 是商 z'/z。

被模为零的复数除是没有意义的；这和在实数代数里被零除是没有意义一致。

五、共轭复数

若 $z=x+\mathrm{i}y$，则称 $x-\mathrm{i}y$ 共轭于 z，且通常记为 $\bar{z}$。易知：

$$\overline{(z_1+z_2)}=\overline{z_1}+\overline{z_2},\quad \overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2},\quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},$$

且 $$|z|^2=z\overline{z},\quad 2\mathrm{Re}z=z+\overline{z},\quad 2\mathrm{iIm}z=z-\overline{z}。\tag{1-4}$$

利用共轭复数和上述这些关系式常常可使得关于复数定理的证明大大地简化。例如，为了证明两个复数乘积的模等于它们模的乘积，我们可如下进行：

$$|z_1z_2|^2=z_1z_2\overline{z_1}\,\overline{z_2}=z_1\overline{z_1}\cdot z_2\overline{z_2}=|z_1|^2\cdot|z_2|^2,$$

由于复数的模不是负的，所以

$$|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|。\tag{1-5}$$

定理 两个复数之和的模不超过它们的模之和。

证明

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2&=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})\\&=z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2+z_2\overline{z_2}\\&=|z_1|^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})+|z_2|^2\\&\leqslant|z_1|^2+2|z_1\overline{z_2}|+|z_2|^2\\&=(|z_1|+|z_2|)^2,\end{aligned}$$

所以

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|。\tag{1-6}$$

利用数学归纳法，能容易地将上述结果推广到任何有限个复数，即

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqslant|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|。$$

用类似的方法，我们能证明另一有用的结果，即

$$|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||。\tag{1-7}$$

利用共轭复数，前述两个复数之商 z'/z 可简单地计算如下：

$$\begin{aligned}z'/z=z'\overline{z}/z\overline{z}&=\frac{(x'+\mathrm{i}y')(x-\mathrm{i}y)}{|z|^2}\\&=\frac{(x'x+y'y)+\mathrm{i}(y'x-x'y)}{x^2+y^2}\quad(z\neq0)。\end{aligned}$$

六、平方根

在实际问题中，常需要求一个复数的平方根。设复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的平方根为 $\alpha+\mathrm{i}\beta$，即，$\sqrt{x+\mathrm{i}y}=\alpha+\mathrm{i}\beta$，则

$$(\alpha+\mathrm{i}\beta)^2=x+\mathrm{i}y_{\circ}$$

于是，我们有

$$\begin{cases}\alpha^2-\beta^2=x,\\ 2\alpha\beta=y_{\circ}\end{cases}\tag{1-8}$$

由这个方程组，我们有

$$(\alpha^2+\beta^2)^2=(\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2=x^2+y^2{}_{\circ}$$

因此 $$\alpha^2+\beta^2=\sqrt{x^2+y^2}{}_{\circ}$$

联立这一方程和方程组(1-8)中的第一式，我们获得

$$\alpha=\pm\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}},$$

$$\beta=\pm\sqrt{\frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}{}_{\circ}$$

一般来说，α 和 β 各有两个解，但是，注意到方程组(1-8)中的第二个式子，在选取 α 和 β 的解时，必须使 α 和 β 的乘积与 y 有相同的符号。因此

$$\sqrt{x+\mathrm{i}y}=\pm\left\{\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}\right.$$
$$\left.+(\mathrm{sgn}y)\mathrm{i}\sqrt{\frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}\right\},\tag{1-9}$$

其中当 $y>0$ 时，$\mathrm{sgn}y=+1$；当 $y<0$ 时，$\mathrm{sgn}y=-1$；当 $y=0$ 时，$\mathrm{sgn}y=0$。

例如在流体管路传输理论中，经常需要求其所谓传播因子

$$\Gamma=[\mathrm{i}\omega C(R+\mathrm{i}\omega L)]^{1/2}$$

的实部和虚部，其中，$\omega=2\pi f$ 是圆频率，f 是频率，R 是流阻，L 是流感，C 是流容，R,L 和 C 都是实数。

设$\Gamma=\alpha+\mathrm{i}\beta$，则

$$\alpha+\mathrm{i}\beta=(-\omega^2LC+\mathrm{i}\omega RC)^{1/2}{}_{\circ}$$

根据公式(1-9)，并注意到$\mathrm{sgn}(\omega RC)=+1$，则

$$\alpha=\sqrt{\frac{-\omega^2LC+\sqrt{\omega^4L^2C^2+\omega^2R^2C^2}}{2}}$$

$$=\left(\frac{\omega^2LC}{2}\right)^{1/2}\left[\left(1+\frac{R^2}{\omega^2L^2}\right)^{1/2}-1\right],$$

$$\beta=\mathrm{sgn}\,(\omega RC)\sqrt{\frac{\omega^2LC+\sqrt{\omega^4L^2C^2+\omega^2R^2C^2}}{2}}$$

$$=\left(\frac{\omega^2LC}{2}\right)^{1/2}\left[\left(1+\frac{R^2}{\omega^2L^2}\right)^{1/2}+1\right].$$

1.2 复数的表示

一、复数的几何表示

在平面上取正交坐标系 Oxy，我们用坐标为 (x,y) 的点表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$。这样复数就与平面上的点一一对应。x 轴称为实轴，实数与 x 轴上的点一一对应；y 轴称为虚轴，虚数 $\mathrm{i}y$ 与 y 轴上的点一一对应。与复数建立了这种对应关系的平面就称为复平面。今后，复数与复平面上的点就不再区别了。全体复数或复平面记作 $\mathscr{C}$。

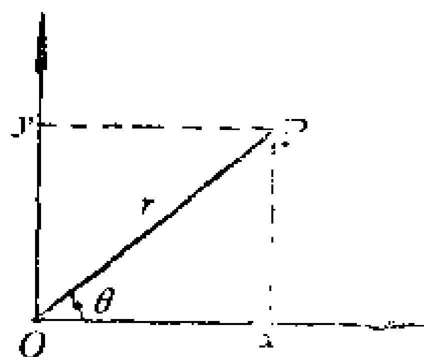


图 1.1

如图 1.1 所示，我们有时也用向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$，x 和 y 分别是 $\overrightarrow{OP}$ 在 x 轴和 y 轴上的垂直投影。$\overrightarrow{OP}$ 的长度 r 就是复数 z 的模 $|z|$。显然

$$|\mathrm{Re}z|\leqslant|z|,\quad |\mathrm{Im}z|\leqslant|z|, \tag{1-10}$$
$$|z|\leqslant|\mathrm{Re}z|+|\mathrm{Im}z|。$$

假如点 P 不在原点（即 $z\neq0$），则称向量 $\overrightarrow{OP}$ 与 x 轴之间的夹角 θ 为 z 的幅角，记作 $\mathrm{Arg}z$。对幅角的方向作这样的规定：若 x 轴到向量 $\overrightarrow{OP}$ 为逆时针方向，则为正；若 x 轴到向量 $\overrightarrow{OP}$ 为顺时针方向，则为负。显然，一个复数有无穷多个幅角：若 $\arg z$ 表示任一给定的幅角，称为 $\mathrm{Arg}z$ 的主值，则

$$\text{Arg}z = \arg z + 2k\pi, \tag{1-11}$$

其中 k 是任意整数。通常，主值 $\arg z$ 取的是满足 $-\pi < \arg z \leqslant \pi$ 的那个幅角。若 P 是原点（即 $z=0$），则 z 的幅角是不定的。

如果取 Ox 为极坐标系的极轴，那么，复数 z 的模 r 和幅角 θ 分别是向量 $\overrightarrow{OP}$ 的极径和极角。由直角坐标系与极坐标系的关系，我们有

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta; \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = |z|\cos\arg z, \\ y = |z|\sin\arg z. \end{cases} \tag{1-12}$$

所以

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \quad \text{或} \quad |z|(\cos\arg z + \mathrm{i}\sin\arg z); \tag{1-13}$$

称此式子为复数 z 的三角表示式。

(1-12)式表明可用 z 的模和幅角来表示 z 的实部和虚部，反之亦然：

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\theta = \text{Arg}\, z = \begin{cases} \text{arc tg}\, \dfrac{y}{x} + 2k\pi\,(z \text{ 位于第 Ⅰ，Ⅳ 象限})\,, \\ \text{arg tg}\, \dfrac{y}{x} + (2k+1)\pi,\,(z \text{ 位于第 Ⅱ，Ⅲ 象限})\,. \end{cases} \tag{1-14}$$

其中 arg tg 表示介于 $-\dfrac{\pi}{2}$ 和 $+\dfrac{\pi}{2}$ 之间的那个主值。

设，$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2)$，于是

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) \\ &\quad + \mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\} \\ &= r_1 r_2\{\cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 + \theta_2)\}. \end{aligned}$$

由此可见

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \tag{1-15}$$

$$\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg}z_1 + \text{Arg}z_2. \tag{1-16}$$

这表明：两复数乘积的模等于模的积，乘积的幅角等于幅角的和。这里应该强调指出的是，(1-16)式反映的只是幅角之间的关系，即数集 $\text{Arg}(z_1 z_2)$ 与数集 $\text{Arg}z_1$ 和 $\text{Arg}z_2$ 之间的关系，而不是数量之间的关系。

就数值而言，当给定主值$\arg z_1$和$\arg z_2$时，则z_1z_2的主值$\arg(z_1z_2)$就被确定了，且$\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2\pm 2\pi$；当给定主值$\arg z_1$和$\arg(z_1z_2)$时，则$z_2$的主值$\arg z_2$就确定了，且$\arg z_2=\arg(z_1z_2)-\arg z_1\pm 2\pi$；同理，当给定主值$\arg(z_1z_2)$和$\arg z_2$时，则$z_1$的主值$\arg z_1$也就被确定了，且$\arg z_1=\arg(z_1z_2)-\arg z_2\pm 2\pi$。

关于两复数相除，由于

$$\frac{z_1}{z_2}=z_1\cdot\frac{1}{z_2}=z_1\cdot\left(\frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2}\right),$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2}\right)=\operatorname{Arg}\overline{z_2}=-\operatorname{Arg}z_2,$$

利用上述关系式(1-15)，(1-16)我们有

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=|z_1|\cdot\frac{|\overline{z_2}|}{|z_2|^2}=|z_1|/|z_2|, \tag{1-17}$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}\left(\frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2}\right)=\operatorname{Arg}z_1-\operatorname{Arg}z_2。 \tag{1-18}$$

由此可见，两复数之商的模等于模的商，商的幅角等于两幅角之差。这里要强调的是，关系式(1-18)反映的是数集$\operatorname{Arg}(z_1/z_2)$等于两数集$\operatorname{Arg}z_1$和$\operatorname{Arg}z_2$之差。就数值而言，当$\arg z_1$，$\arg z_2$和$\arg(z_1/z_2)$中任意给定两个主值时，第三个主值就唯一地被确定，它们之间必须满足关系式：

$$\arg(z_1/z_2)=\arg z_1-\arg z_2\pm 2\pi。 \tag{1-19}$$

设$z_j=r_j(\cos\theta_j+i\sin\theta_j)$，$j=1,2,\cdots,n$，利用关系式(1-15)，(1-16)和数学归纳法，则我们有

$$|z_1z_2\cdots z_n|=|z_1|\cdot|z_2|\cdots|z_n|, \tag{1-20}$$

$$\operatorname{Arg}(z_1\cdots z_2)=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2+\cdots+\operatorname{Arg}z_n。 \tag{1-21}$$

(1-21)式只是数集$\operatorname{Arg}(z_1\cdots z_2)$与$\operatorname{Arg}z_j(j=1,2,\cdots,n)$间的关系，就数值而言，只要$\arg z_j(j=1,2,\cdots,n)$和$\arg(z_1\cdots z_n)$这$n+1$个主值中任意给定$n$个主值，则另外一个主值就唯一地被关系式

$$\arg(z_1z_2\cdots z_n)=\arg z_1+\cdots+\arg z_n\pm 2k\pi$$

所确定，其中 k 是某个非负整数。特别，当 n 是正整数和 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$时，有

$$\begin{cases}|z^n|=|z|^n,\\ \operatorname{Arg} z^n=n\operatorname{Arg} z。\end{cases} \tag{1-22}$$

若 n 是正整数，则 $z^{1/n}$ 有 n 个互不相同的值。事实上，设 $w=z^{1/n}$，则 $w^n=z$，由关系式(1-22)即得

$$\begin{cases}|w|^n=|z|,\\ n\operatorname{Arg} w=\operatorname{Arg} z。\end{cases}$$

于是，即得

$$\begin{aligned}z^{1/n}&=|z|^{1/n}\left(\cos\frac{\operatorname{Arg} z}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\operatorname{Arg} z}{n}\right)\\&=|z|^{1/n}\left(\cos\frac{\arg z+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\arg z+2k\pi}{n}\right),\end{aligned} \tag{1-23}$$

其中 $k=0,1,2,\cdots,n-1$。故 $z^{1/n}$ 恰有 n 个根。

类似地，若 p 和 q 是互质的整数且 q 是正的，则

$$\begin{aligned}z^{p/q}&=|z|^{p/q}\left(\cos\left(\frac{p}{q}\operatorname{Arg} z\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{p}{q}\operatorname{Arg} z\right)\right)\\&=|z|^{p/q}\left\{\cos\frac{p\arg z+2k\pi}{q}+\mathrm{i}\sin\frac{p\arg z+2k\pi}{q}\right\},\end{aligned} \tag{1-24}$$

其中，$k=0,1,2,\cdots;q-1$。

二、复数的指数表示

利用欧拉(Euler)公式（将在这章的§3.2中证明）：

$$e^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta, \tag{1-25}$$

我们又可将复数 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$表示成下述指数形式：

$$z=re^{\mathrm{i}\theta}。 \tag{1-26}$$

在流体管路传输中，经常需要将其特征阻抗

$$Z_C=\left(\frac{R+\mathrm{i}\omega L}{\mathrm{i}\omega C}\right)^{1/2}$$

表示成指数形式，即 $Z_C=|Z_C|e^{\mathrm{i}\theta}$。

根据公式(1-17)和(1-23)，则

$$|Z_C| = \frac{|R+\mathrm{i}\omega L|^{1/2}}{|\mathrm{i}\omega C|^{1/2}} = \frac{\sqrt[4]{R^2+\omega^2L^2}}{\sqrt{\omega C}}$$

$$= \left(\frac{L}{C}\right)^{1/2}\left(1+\frac{R}{\omega^2L^2}\right)^{1/4},$$

另外，由于

$$Z_C = \left(\frac{L}{C} - \mathrm{i}\frac{R}{\omega C}\right)^{1/2},$$

由公式(1-26)和(1-23)，我们有

$$\theta = \frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{-R/\omega C}{L/C}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\left(-\frac{R}{\omega L}\right),$$

故

$$\theta = -\frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{R}{\omega L}\right)。$$

特别，若 $R=0$，则 $\theta=0$，于是 $Z_C=\sqrt{L/C}$ 是实数。

三、复数的球面表示与扩充复平面

见图 1.2，考虑一个半径为 1 的球面 S：

$$x^2+y^2+u^2=1,$$

点(0，0，1)称为北极，记作 N，同时 xy 平面就是复平面 $\mathscr{C}$，复平面交球面 S 于赤道。

现在，对 $\mathscr{C}$ 中的每一个点 z，它与 N 连接的直线只交 S 于一点 $Z\neq N$。若 $|z|<1$，那么 Z 在下半球面上；若 $|z|>1$，那么 Z 在上半球面上；若 $|z|=1$，那么 $Z=z$。反之，球面上任意一点 $Z\neq N$，它与 N 连接的直线也只交 $\mathscr{C}$ 于一点 z。于是除了 $N=(0,0,1)$ 外，复平面 $\mathscr{C}$ 和球面 S 上的点都是一一对应的，并且当 $|z|\to+\infty$ 时，Z 趋于 N。因此，很自然，在复平面 $\mathscr{C}$ 中引进一个理想的点，作为 N 的对应点，这点称为无穷远点，记作 $z=\infty$。加上无穷远点的复平面称为扩充复平面，记作 $\overline{\mathscr{C}}=\mathscr{C}\cup\{\infty\}$。$\overline{\mathscr{C}}$ 与球面 S 上的点建立起来的这种一对一的对应称

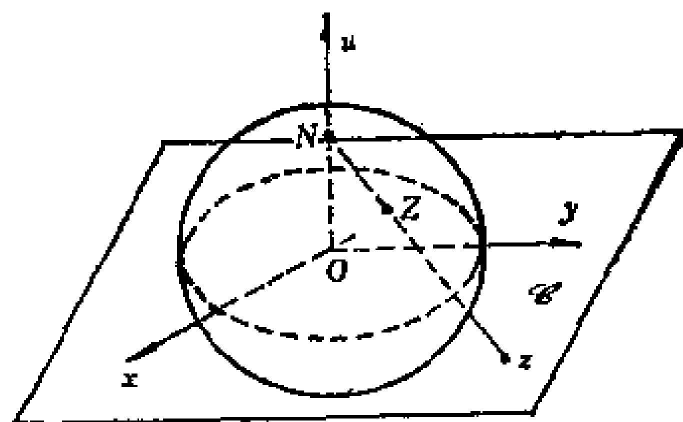


图 1.2

为球极射影，称 S 为黎曼(Riemann)复球面。

值得注意的是，对于无穷远点，其模是 $+\infty$，而其幅角是不定的。在扩充复平面 $\overline{\mathscr{C}}$ 上，任一直线都通过无穷远点。

习　题

1．求下列各复数的模和幅角的主值：

$1+i$； i； $2-3i$； $-1+i$； $-5+12i$。

2．设 $z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2$，问下列各关系式成立吗？

(1) $\mathrm{Re}(z_1+z_2)=\mathrm{Re}z_1+\mathrm{Re}z_2$；　(2) $\mathrm{Re}(z_1z_2)=\mathrm{Re}(z_2z_1)$；

(3) $\mathrm{Im}(z_1z_2)=\mathrm{Im}z_1\cdot\mathrm{Im}z_2$；　(4) $z_1\mathrm{Re}z_2=z_2\mathrm{Re}z_1$。

3．设 z 是一复数，证明：

(1) $\mathrm{Re}(iz)=-\mathrm{Im}z$；　(2) $\mathrm{Im}(iz)=\mathrm{Re}z$；

(3) $\mathrm{Re}(z^2)=(\mathrm{Re}z)^2-(\mathrm{Im}z)^2$；　(4) $\mathrm{Im}(z^2)=2(\mathrm{Re}z)(\mathrm{Im}z)$。

4．计算下列式子的数值，并将它写成 $a+ib$ 的形式，此地，a 和 b 是实数：

(1) $\dfrac{1}{1+i}$；　(2) $\dfrac{3+4i}{(1+i)(2-i)}$；

(3) $\left(\dfrac{1}{1+i}\right)\left(\dfrac{1}{1-i}\right)+2+i$；　(4) $\mathrm{Im}\dfrac{(1+i)(2+i)}{\mathrm{Re}(3-4i)}$；

(5) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{2+i}{1-i}\right)$；　(6) $\dfrac{\mathrm{Im}[(1+i)(2+i)]}{3-4i}$；

(7) $\dfrac{1}{(1+i)^{37}}$；　(8) $\left[\dfrac{3+4i}{3-4i}-\dfrac{3-4i}{3+4i}\right]^3$。

5．把下列各复数写成三角形式：

(1) $3i$；　(2) $1+i$；　(3) $2+5i$；　(4) $-i$；

(5) $-1-i$；　(6) $-2+5i$；　(7) 2；　(8) $\sqrt{3}-i$；

(9) $2-5i$；　(10) -2；　(11) $1-\sqrt{3}i$；　(12) $-2-5i$。

6．试求：

(1) $\sqrt[4]{i}$；　(2) $\sqrt{1-i}$；　(3) $\sqrt[3]{-8}$；

(4) $\sqrt{3+4i}$；　(5) $\sqrt[6]{1}$；　(6) $\sqrt{-2+2i}$。

7．满足下列条件的点 z 所组成的点集是什么？并在图上将其表示出来：

(1) $0<\mathrm{Re}(iz)<1$；　(2) $\arg(z-i)=\dfrac{\pi}{4}$；

(3) $\frac{\pi}{6}<\arg\left(\frac{z-i}{z+i}\right)<\frac{\pi}{4}$；　　(4) $|z+2i|\geqslant 2$；

(5) $1<|z+1+i|<2$；　　(6) $|z-i|=|z+2|$。

8. 证明：方程 $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=\lambda$ 表示的是以 $\frac{z_1-\lambda^2 z_2}{1-\lambda^2}$ 为圆心，以 $\frac{\lambda|z_1-z_2|}{1-\lambda^2}$ 为半径的圆周，其中 $\lambda>0,\lambda\neq 1$。

9. 证明拉格朗日(Lagrange)恒等式：

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k b_k\right|^2=\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\cdot\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2-\sum_{1\leqslant k<j\leqslant n}|\overline{a_k}b_j-a_j\overline{b_k}|^2。$$

由此推出柯西(Cauchy)不等式：

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k b_k\right|^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\cdot\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2，$$

并且仅当 a_k 与 b_k 成比例时等号成立。

§2 解析函数

2.1 点集

设 z_0 是复平面 $\mathscr{C}$ 上的一点，我们称以 z_0 为圆心、以正数 ε 为半径的一个开圆盘，即满足 $|z-z_0|<\varepsilon$ 的一切点为 z_0 的 **ε-邻域**或**邻域**。

设 $\mathscr{D}$ 是 $\mathscr{C}$ 上的一个点集，z_0 是 $\mathscr{D}$ 内一点，记为 $z_0\in\mathscr{D}$，如果存在 z_0 的某一个 ε-邻域，使得这个 ε-邻域中的点都包含在 $\mathscr{D}$ 中，则称 z_0 是 $\mathscr{D}$ 的一个**内点**。如果 $\mathscr{D}$ 的每个点都是它的内点，则称 $\mathscr{D}$ 是个**开集**。如果 $\mathscr{D}$ 是开集，又对于 $\mathscr{D}$ 内任何两点 z_1,z_2 都可用一条由 $\mathscr{D}$ 内的点所组成的折线将它们连接起来（即有连通性），则称 $\mathscr{D}$ 是个**区域**。

点 z_0 称为点集 $\mathscr{D}$ 的**极限点**或**聚点**，如果点 z_0 的任何 ε-邻域内有属于 $\mathscr{D}$ 的，且异于 z_0 的点。集 $\mathscr{D}$ 的极限点可以属于 $\mathscr{D}$，也可以不属于 $\mathscr{D}$。如果集 $\mathscr{D}$ 的所有极限点都属于 $\mathscr{D}$，则称 $\mathscr{D}$ 是个**闭集**。

凡是其本身不属于区域 $\mathscr{D}$ 的极限点，称为区域 $\mathscr{D}$ 的**边界点**。区域 $\mathscr{D}$ 的所有边界点的集合，称为区域 $\mathscr{D}$ 的**边界**，记作 $\partial\mathscr{D}$。区域 $\mathscr{D}$ 连同它的边界在一起，即 $\mathscr{D}\cup\partial\mathscr{D}$，称为**闭区域**，记作 $\overline{\mathscr{D}}$。

设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是闭区间$[\alpha,\beta]$上的实值连续函数，则称方程 $z=z(t)=x(t)+iy(t)$ 所决定的点集为**连续弧**。如果至少存在两个不同的 t_1 和 t_2，$t_1, t_2\in(\alpha,\beta)$，使得$z_1=z(t_1)=z(t_2)$，则称点 z_1 是弧的一个**重点**。我们称没有重点的连续弧为**若当(Jordan)弧**。如果一若当弧的两个端点是重合的，即$z(\alpha)=z(\beta)$，则称为**若当闭曲线**。若导数 $x'(t)$ 和 $y'(t)$ 在(α,β)上是连续的，则称 $z(t)$ 是一**光滑弧**。

设 $\mathscr{D}$ 是 $\mathscr{C}$ 上一个点集，如果存在一个常数 K，使得$|z|\leqslant K$ 对 $\mathscr{D}$ 中的一切点 z 均满足，则称 $\mathscr{D}$ 是个**有界集**；否则，称 $\mathscr{D}$ 是**无界集**。

若当定理 一若当闭曲线将复平面 $\mathscr{C}$ 分成两个开区域，它们以此曲线为其公共边界。这两个区域中有一个是有界的，称它为若当曲线的内部；另一个区域是无界的，称为若当曲线的外部。

虽然这结果好像十分明显，但它的证明是很复杂和很困难的。

如果区域 $\mathscr{D}$ 的边界是由有限多互不相交的**“连续统”**——即连络闭集所组成（如图 1.3 中的那个区域的边界是由 $\Gamma_0\cup\gamma_2, \Gamma_1, \Gamma_2, \gamma_1$ 和点 a 这五个互不相交的连续统所组集），则称 $\mathscr{D}$ 是**多连区域**。如果区域 $\mathscr{D}$ 的边界只由一个连续统所构成，则称 $\mathscr{D}$ 是**单连区域**（如图 1.4 所示）。

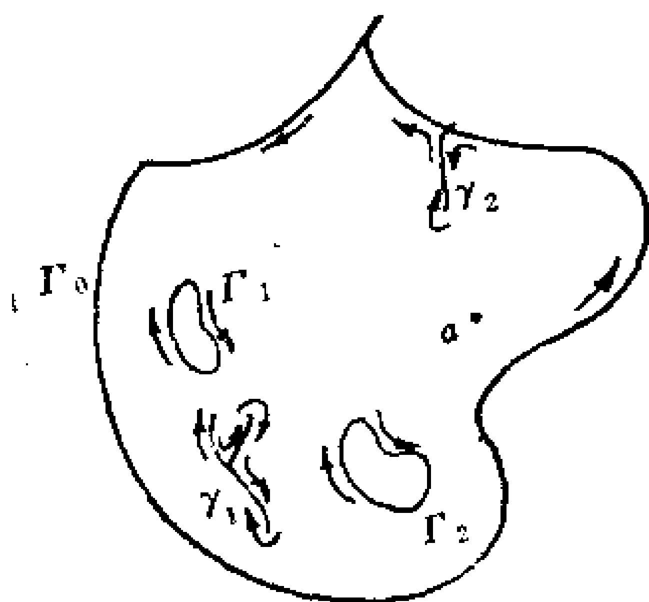


图 1.3

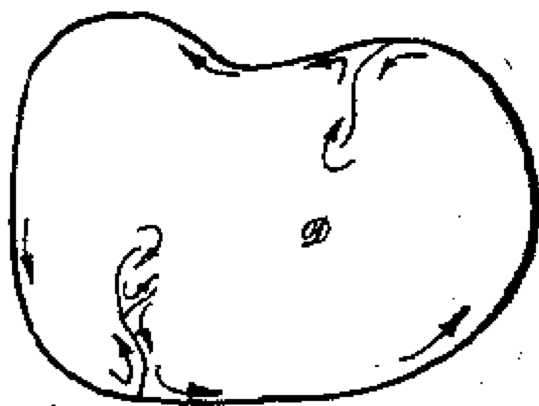


图 1.4

设区域 $\mathscr{D}$ 的边界 $\partial\mathscr{D}$ 是由一个或有限多个连续统所构成，我们对它的边界规定方向。如果点在 $\partial\mathscr{D}$ 的每个连续统上行走时，区域 $\mathscr{D}$ 总保持在前进方向的左侧，则称此方向关于区域 $\mathscr{D}$ 是正的（见图 1.3 和图 1.4）；若 $\mathscr{D}$ 总保持在其前进方向的右侧，则称此方向关于 $\mathscr{D}$ 是负的。

2.2 复变函数

设 $\mathscr{D}$ 是复平面 $\mathscr{C}$ 上的一个点集。若对每一个 $z\in\mathscr{D}$，按照已经指明的规则都对应着 $\mathscr{C}$ 上一个确定的点（或称值）w，或多个确定的点（或值）w，则称在 $\mathscr{D}$ 上确定一个**函数**，记作 $w=f(z)$，有时也称在 $\mathscr{D}$ 上确定一个**映照** $f(z)$。"函数"在于着重说明复数与复数之间的对应关系；"映照"则在于着重说明复平面上点与点之间的对应关系。若每一个点 z 都只与一个确定的点 w 相对应，则称 $w=f(z)$ 是 $\mathscr{D}$ 上的**单值函数**；若有多个确定的点 w 相对应，则 $f(z)$ 是 $\mathscr{D}$ 上的**多值函数**。我们知道，函数 $w=z^{1/n}$ 就复平面 $\mathscr{C}$ 上的 **n 值函数**，其中 n 是大于 1 的自然数。

设 $w=u+iv$ 和 $z=x+iy$，那末给定一个复变函数 $w=f(z)$，就等于给定两个含有两个实变数的实值函数。

$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y)。$$

如果 $w=f(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 上是单值的，并且对于 $\mathscr{D}$ 的两个不同的点，也对应着两个不同的点，则称 $w=f(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 上是**一一的**或**单叶的**。在这种情况下，$w=f(z)$ 在点集 $\mathscr{M}=\{f(z):z\in\mathscr{D}\}$ 上有一个反函数，记作 $z=f^{-1}(w)$，或 $z=\varphi(w)$。

设函数 $w=f(z)$ 把集合 $\mathscr{D}$ 映照到上 $\mathscr{N}$，而 $\zeta=g(w)$ 又把集合 $\mathscr{N}$ 映照成点集 $\mathscr{M}$，则称将 $\mathscr{D}$ 映照成 $\mathscr{M}$ 的那个函数

$$\zeta=h(z)=g[f(z)]$$

为由 f 和 g 所合成的**复合函数**，而对应的映照 h 称为映照 f 和 g 的**乘积**。

例 1-1 设 a 是一给定的复数，且 $|a|<1$，则函数

$$w=f(z)=\frac{z-a}{1-\bar{a}z}。\tag{1-27}$$

在复平面 $\mathscr{C}$ 上是单叶的，并且

若 $|z|<1$，则 $|w|<1$；若 $|z|=1$；则 $|w|=1$，若 $|z|>1$；则 $|w|>1$。

解 若 $z\neq 1/\bar{a}$，则函数$f(z)$是单值的；若当 $z=1/\bar{a}$时，规定 $f(z)=\infty$，则 $f(z)$在 $\mathscr{C}$ 上是单值的。

若 $z_1\neq z_2$，且 z_1，$z_2\neq 1/\bar{a}$，由于

$$\begin{aligned}f(z_1)-f(z_2)&=\frac{z_1-a}{1-\bar{a}z_1}-\frac{z_2-a}{1-\bar{a}z_2}\\&=\frac{(z_1-z_2)(1-|a|^2)}{(1-\bar{a}z_1)(1-\bar{a}z_2)}\neq 0,\end{aligned}$$

则表明 $w=f(z)$在 $\mathscr{C}$ 上除点 $1/\bar{a}$外是单叶的。由于只有 $z=1/\bar{a}$对应于 ∞，故 $w=f(z)$在 $\mathscr{C}$ 上是单叶的。

由于

$$|z-a|^2=|z|^2-2\mathrm{Re}(z\bar{a})+|a|^2,$$

$$|1-\bar{a}z|^2=1-2\mathrm{Re}(a\bar{z})+|\bar{a}|^2|z|^2,$$

$$\mathrm{Re}(z\bar{a})=\mathrm{Re}(a\bar{z}),\quad |\bar{a}|^2=|a|^2,$$

我们有

$$|z-a|^2-|1-\bar{a}z|^2=(1-|a|^2)(|z|^2-1)。$$

从而

$$|f(z)|^2=\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2=1+\frac{(1-|a|^2)(|z|^2-1)}{|1-\bar{a}z|^2}。$$

因此，若$|z|<1$，则$|f(z)|^2<1$，故$|f(z)|<1$；若$|z|=1$，则$|f(z)|^2=1$，故$|f(z)|=1$；若$|z|>1$，则$|f(z)|^2>1$，故$|f(z)|>1$。

例 1-2 设 $\mathrm{Re}a<0$，则函数

$$w=f(z)=\frac{z-a}{z+\bar{a}}\tag{1-28}$$

在复平面 $\mathscr{C}$ 上是单叶的，并且若 $\mathrm{Re}z<0$，则$|f(z)|<1$；若 $\mathrm{Re}z=0$，则$|f(z)|=1$；若 $\mathrm{Re}z>0$，则$|f(z)|>1$。

解 事实上，由于对 $z_1\neq z_2$，z_1，$z_2\neq -\bar{a}$，有

$$f(z_1)-f(z_2)=\frac{2(z_1-z_2)\mathrm{Re}a}{(z_1+\overline{a})(z_2+\overline{a})}\neq 0,$$

所以，$w=f(z)$在 $\mathscr{C}$ 上除点 $-\overline{a}$ 外是单叶的。又由于只有点$-\overline{a}$对应于 ∞，故 $w=f(z)$在 $\mathscr{C}$ 上是单叶的。

经计算
$$|f(z)|^2=1+\frac{(-4\mathrm{Re}a)\mathrm{Re}z}{|z+\overline{a}|^2},$$
由此可见，若 $\mathrm{Re}z<0$，则$|f(z)|^2<1$，故$|f(z)|<1$；若$\mathrm{Re}z=0$，则$|f(z)|^2=1$，故$|f(z)|=1$；若 $\mathrm{Re}z>0$，则$|f(z)|^2>1$，故$|f(z)|>1$。

例 1-3 儒廓夫斯基(Rukoufski)函数
$$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) \tag{1-29}$$
在单位圆的内部 $|z|<1$|和它的外部$|z|>1$ 都是单叶的。

解 事实上，这函数对一切的 $z\neq 0$ 都是有定义的，而且是单值的。我们规定，当 $z=0$ 或 $z=\infty$ 时，它对应于 ∞，则这函数在$|z|<1$ 内和在$|z|>1$ 内都是单值的。

经计算
$$w(z_1)-w(z_2)=(z_1-z_2)(z_1z_2-1)/z_1z_2,$$
由此可见，对于单位圆内不同的 z_1，z_2 和单位圆外不同的 z_1，z_2，$w(z_1)\neq w(z_2)$，故儒廓夫斯基函数在$|z|<1$ 内和$|z|>1$ 内都是单叶的。

设 $f(z)$是区域 $\mathscr{D}$ 内的单值函数，$z_0\in\mathscr{D}$，如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正数 δ，使得
$$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$$
对 $\mathscr{D}$ 中满足$|z-z_0|<\delta$ 的一切点 z 成立，则称函数 $f(z)$在 $z=z_0$ 处是**连续的**。数 δ 依赖于 ε，一般情况下，它也依赖于 z_0。如果 $f(z)$在 $\mathscr{D}$ 中的每个点都是连续的，则称 $f(z)$是 $\mathscr{D}$ 上的连续函数。若能找到数 $h(\varepsilon)$，它与 $z_0\in\mathscr{D}$ 无关，使得对 $\mathscr{D}$ 中一切的点 z 和 z_0，只要 $|z-z_0|<h$，则$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$ 都成立，那么称 $f(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 内是**一致连续的**或**均匀连续的**。我们能证明，闭区域 $\overline{\mathscr{D}}$ 上的连续函数一定在 $\overline{\mathscr{D}}$ 上均匀连续。

2.3 可微性

设 $f(z)$ 是定义在区域 $\mathscr{D}$ 上的单值函数，$z_0 \in \mathscr{D}$，若

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \quad \text{或} \quad \frac{[f(z_0+\Delta z)-f(z)_0)}{\Delta z}$$

当 $z(z=z_0+\Delta z)\to z_0$（或 $\Delta z\to 0$）时趋于一个唯一的极限，则称 $f(z)$ 在点 z_0 是**可微的**。

若上述极限存在，则称它为函数 $f(z)$ 在点 z_0 的**导数**，记作 $f'(z_0)$ 或 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}f(z)$。我们重新将定义叙述成更基本的形式，即对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正数 δ，使得

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|<\varepsilon$$

对 $\mathscr{D}$ 中满足 $0<|z-z_0|<\delta$ 的一切 z 均成立。

当 $f(z)=z^n(n=0,1,2,\cdots)$ 时，容易证明，对任何一点 $z_0\in\mathscr{C}$，$f'(z_0)=nz_0^{n-1}$。事实上，$f(z_0)=z_0^n$，$f(z_0+\Delta z)=(z_0+\Delta z)^n$，利用二项式定理，有

$$(z_0+\Delta z)^n=z_0^n+nz_0^{n-1}\cdot\Delta z+\frac{n(n-1)}{2}z_0^{n-2}(\Delta z)^2+\Delta z \text{ 的更高阶的项。}$$

于是

$$\begin{aligned} f'(z_0)&=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}\\ &=\lim_{\Delta z\to 0}\left[\frac{z_0^n+nz_0^{n-1}\Delta z+\frac{n(n-1)}{2}z_0^{n-2}(\Delta z)^2+o(\Delta z)^2-z_0^n}{\Delta z}\right]\\ &=\lim_{\Delta z\to 0}\left[nz_0^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}z_0^{n-2}\Delta z+o(\Delta z)^2\right]\\ &=nz_0^{n-1}\text{。}\end{aligned}$$

为了得到这一结果，我们并不需要知道 Δz 收缩成零的路径。这结果是与 $z_0+\Delta z$ 趋于 z_0 的道路无关的。删去足标 0，我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}z^n=nz^{n-1}。$$

于是，若 n 是非负的整数，则 z^n 的导数对一切 z 是存在的。当 n 是负整数时，类似的推导能证明上述方程(1-29)对一切 $z\neq 0$ 也成立。

若 $f(z)$在 z_0 是可微的，则显然，$f(z)$在点 z_0 是连续的；但反过来是不成立的，这可从下述的简单例子看出来。

设 $f(z)=|z|^2$，这个连续函数在原点是可微的，但在其它地方是不可微的。因为若 $z_0\neq 0$，我们有

$$\frac{|z|^2-|z_0|^2}{z-z_0}=\frac{z\bar{z}-z_0\bar{z_0}}{z-z_0}=\bar{z}+z_0\frac{\bar{z}-\bar{z_0}}{z-z_0}$$
$$=\bar{z}+z_0(\cos 2\varphi-\mathrm{i}\sin 2\varphi),$$

其中，$\varphi=\arg(z-z_0)$。很清楚，当 $z\to z_0$ 时，这个式子不可能趋于唯一的一个极限。

若 $z_0=0$，这有限差商是 $\bar{z}$，当 $z\to 0$ 时它是趋于零的。

由上述可微性的定义可见，数学分析中的那些求导公式对复变函数来说，也仍然是成立的，即

$$\begin{cases}(f(z)+g(z))'=f'(z)+g'(z),(f(z)\cdot g(z))'=f'(z)\cdot g(z)+f(z)\cdot g'(z),\\ [f(g(z))]'=f'(g(z))g'(z),\\ \left(\dfrac{f(z)}{g(z)}\right)'=\dfrac{f'(z)g(z)+f(z)g'(z)}{g^2(z)}, \quad f'(z)=\dfrac{1}{\varphi'(w)}。\end{cases}\tag{1-30}$$

(在上面最后一个关系式中，f 与 φ 是互为反函数的函数，且$f'(z)\neq 0$)。

2.4 解析函数

若 $f'(z)$在 z_0 的某个邻域内是点点可导的，则我们称 $f(z)$ 在点 z_0 是**解析的**（有的书上也称为正则的或全纯的）。若 $f(z)$ 在区域 $\mathscr{D}$ 内点点是解析的，则称 $f(z)$在区域 $\mathscr{D}$ 内解析。若 $f(z)$ 在整个复平面 $\mathscr{C}$ 上解析，则称 $f(z)$ 是**整函数**。若 $f(z)$在点 z_0 不是解析的，但若它在点 z_0 的每个邻域内至少有一点是解析的，则称 z_0 是

$f(z)$的奇异点（或奇点）。设$f(z)=(z^3+2)/(z^2+1)$，则 $+i$ 和 $-i$ 是 $f(z)$的奇点。下面讨论解析的必要或充分条件。

一、$f(z)$是解析的必要条件

若 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在给定点是可微的，则当 Δz 以任何方式趋于零时，比率$\{f(z+\Delta z)-f(z)\}/\Delta z$ 必须趋于一个确定的极限。令 $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$，取 Δz 完全是实数，于是 $\Delta y=0$，则

$$\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+i\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}$$

当 $\Delta x\to 0$ 时必须趋于一个确定的极限。于是在点(x,y)处的偏导数 u_x,v_x 必须存在，而且这个极限就是 u_x+iv_x 类似地，若我们取 Δz 完全是虚数，于是 $\Delta x=0$，我们发现 u_y,v_y 必在点(x,y)处存在，而且在此情况下这极限是 v_y-iu_y。由于得到的这两个极限值必须是相等的，取实部和虚部，我们获得

$$u_x=v_y,\ u_y=-v_x。\tag{1-31}$$

这两个关系式称为**柯西-黎曼偏微分方程。**

这样，我们已经证明，$f(z)$在点 z 处可微的必要条件是，四个偏导数 u_x,v_x,u_y,v_y 存在，而且满足柯西-黎曼偏微分方程。

上述条件是必要的，但不是充分的，例如函数 $u+iv=f(z)$，其中

$$f(z)=\frac{x^3(1+i)-y^3(1-i)}{x^2+y^2}\quad(z\neq 0),f(0)=0,$$

该函数在原点是连续的，而且满足柯西-黎曼方程，但 $f'(0)$不存在。

又如，设函数$f(z)=\sqrt{|xy|}$，虽然该函数在原点满足柯西-黎曼方程，但它在原点不是解析的。

这两个例子的证明留给读者去完成。

二、$f(z)$是解析的充分条件

定理 设 $f(z)$是区域 $\mathscr{D}$ 内连续的单值函数，若在 $\mathscr{D}$ 内每一点，u_x,v_x,u_y,v_y 这四个偏导数存在且连续，并满足柯西-黎曼方程，则 $f(z)$在区域 $\mathscr{D}$ 内是解析的。

证明 利用中值定理，有

$$\Delta u = u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y)$$
$$= u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x+\Delta x, y) + u(x+\Delta x, y) - u(x, y)$$
$$= \Delta y \cdot u_y(x+\Delta x, y+\theta\Delta y) + \Delta x \cdot u_x(x+\theta'\Delta x, y),$$

其中 $0<\theta<1, 0<\theta'<1$。由于 u_x, u_y 是连续的，我们能将 Δu 写成

$$\Delta u = \Delta x\{u_x(x, y) + \varepsilon\} + \Delta y\{u_y(x, y) + \varepsilon'\},$$

其中 ε 和 ε' 当 $|\Delta z|\to 0$ 时均趋于零。

类似地，有

$$\Delta v = \Delta x\{v_x(x, y) + \eta\} + \Delta y\{v_y(x, y) + \eta'\},$$

其中 η 和 η' 当 $|\Delta z|\to 0$ 时都趋于零。因此

$$\Delta w = \Delta u + i\Delta v$$
$$= \Delta x(u_x + iv_x) + \Delta y(u_y + iv_y) + \omega\Delta x + \omega'\Delta y,$$

其中 ω 和 ω' 当 $|\Delta z|\to 0$ 时都趋于零。

应用柯西-黎曼方程，我们获得

$$\Delta w = (\Delta x + i\Delta y)(u_x + iv_x) + \omega\Delta x + \omega'\Delta y,$$

两边除以 Δz，令 $\Delta z\to 0$，取极限，便得

$$\frac{dw}{dz} = u_x + iv_x,$$

因为 $\left|\dfrac{\omega\Delta x + \omega'\Delta y}{\Delta z}\right| \leqslant |\omega| + |\omega'|$。

我们注意到，在上述 $f(z)$ 解析性的充分条件的讨论中，要求 u 和 v 的四个一阶偏导数具有连续性。

还有一点值得指出的是，若 $f(z)$ 是解析的，则

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = 0。\tag{1-32}$$

事实上，若 $w = u + iv = f(z)$，u，v 是 x 和 y 的函数，由于

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \qquad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}),$$

u 和 v 能形式地看成是 z 和 $\bar{z}$ 这两个独立变量的函数，于是

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = u_x\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + u_y\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} + i\left(v_x\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + v_y\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}\right)$$
$$= \frac{1}{2}(u_x + iv_x) + \frac{i}{2}(u_y + iv_y)$$

$$=\frac{1}{2}[(u_x-v_y)+\mathrm{i}(v_x+u_y)]。$$

因此，由柯西-黎曼方程，立即知道 $\partial f(z)/\partial \bar{z}=0$。

公式(1-32)表明，在一个表示 z 的解析函数的解析式子中，x 和 y 只能以 $x+\mathrm{i}y$ 的联合式出现。例如，一看就能明白，函数

$$\sin(x+3\mathrm{i}y)=\sin(2z-\bar{z})$$

不可能是个解析函数。

最后，我们还要指出柯西-黎曼方程的一个推广。设函数 $f(z)$ 在点 z 是解析的。在点 z 任意选取两个相互正交的单位向量 S^0 和 n^0（即模等于1的两个复数），并且 S^0 按逆时针方向转到 n^0。由于导数的计算与所取的方向无关，于是我们有

$$f'(z)=\frac{1}{S^0}\left(\frac{\partial u}{\partial S}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial S}\right)=\frac{1}{n^0}\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial n}\right),$$

取其实部和虚部，便得到

$$\frac{\partial u}{\partial S}=\frac{\partial v}{\partial n},\quad \frac{\partial u}{\partial n}=-\frac{\partial v}{\partial S}。\tag{1-33}$$

特别在极坐标(r,θ)中，设 S^0 是圆周$|z|=r$ 的逆时针方向的切线的单位向量，n^0 是圆周$|z|=r$ 的向心法线的单位向量。注意到 $\partial S=r\partial\theta,\partial n=-\partial r$，由(1-33)便得到极坐标下的柯西-黎曼方程为：

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=-r\frac{\partial v}{\partial r},\quad r\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial \theta}。\tag{1-34}$$

2.5 调和函数及其在物理学中的一些应用

设 $f(z)$是个解析函数，$z=x+\mathrm{i}y$，令 $u(x,y)=\mathrm{Re}f(z)$，$v(x,y)=\mathrm{Im}f(z)$，则称 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$是互为**共轭函数**。

由于 u 和 v 的偏导数满足柯西-黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

若 u 和 v 的二阶偏导数都存在，且关于 x 和 y 的二阶混合偏导数是可交换的，对(1-31)式求偏导数，即得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

因此，u 和 v 都满足二维的拉普拉斯(Laplace)方程。

$$\nabla^2\varphi\equiv\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0。\tag{1-35}$$

我们称满足拉普拉斯方程(1-35)的函数为**调和函数**。以后，我们会知道，解析函数 $f(z)$的实部 $u(x,y)$和虚部 $v(x,y)$都是调和函数。这里我们自然要问：给定调和函数 $u(x,y)$或 $v(x,y)$，我们能否找到一个解析函数 $f(z)$，使得所给的 $u(x,y)$或 $v(x,y)$恰是 $f(z)$的实部或虚部？答案是可能的。若给定的函数 $u(x,y)$或 $v(x,y)$是满足拉普拉斯方程的初等函数的一个简单组合，则这样的解析函数 $f(z)$是存在的。这时用下述米尔-汤姆松(Milne-Thomson)方法找 $f(z)$是非常方便的。

由于 $$x=\frac{1}{2}(z+\overline{z}),\quad y=\frac{1}{2i}(z-\overline{z}),$$

$$f(z)=u\left(\frac{z+\overline{z}}{2},\ \frac{z-\overline{z}}{2i}\right)+iv\left(\frac{z+\overline{z}}{2},\ \frac{z-\overline{z}}{2i}\right),$$

我们可将这等式看成是两个独立变量 z 和 $\overline{z}$ 的形式恒等式，置 $\overline{z}=z$，有

$$f(z)=u(z,0)+iv(z,0)。$$

根据柯西-黎曼方程，$f'(z)=u_x+iv_x=u_x-iu_y$，因此，若将 u_x 和 u_y 分别记为 $\varphi_1(x,y)$和 $\varphi_2(x,y)$，则我们有

$$f'(z)=\varphi_1(x,y)-i\varphi_2(x,y)=\varphi_1(z,0)-i\varphi_2(z,0)。$$

将上式积分之，我们有

$$f(z)=\int\{\varphi_1(z,0)-i\varphi_2(z,0)\}dz+c,\tag{1-36}$$

其中 c 是个任意常数。

类似地，若 $v(x,y)$是给定的，令 $\psi_1(x,y)=v_y$，$\psi_2(x,y)=v_x$，我们能证明：

$$f(z)=\int\{\psi_1(z,0)+i\psi_2(z,0)\}dz+c,\tag{1-37}$$

其中 c 是个任意常数。

例如，设 $u(x,y)=e^x(x\cos y-y\sin y)$。

这里

$$\varphi_1=\frac{\partial u}{\partial x}=e^x(x\cos y-y\sin y+\cos y),$$

$$\varphi_2=\frac{\partial u}{\partial y}=e^x(-x\sin y-\sin y-y\cos y)。$$

因此 $$f'(z)=\varphi_1(z,0)-i\varphi_2(z,0)=e^z(z+1),$$

故 $$f(z)=\int e^z(z+1)dz+c=ze^z+c。$$

下面我们将讨论可用调和函数描述的一些物理现象。

一、稳定状态的热传导问题

我们知道，热通过物体的传导是能量被转移。在物体内每一点处热能流动的时间比率能用向量来表示。在一般情况下，这个向量的长度和方向不仅随点的位置而变化，而且还随时间而改变。我们仅限于讨论**稳定状态**问题，即这热流向量与时间无关。这样，在物体内的热传导强度就由空间坐标的向量函数给出。这样的函数通称为**向量场**。在现在情况下，这个向量场被称为**热流密度场**，记为 Q。

由于它与复变理论有紧密的联系，我们在这里只讨论二维热流问题，这就是说，这向量场中的向量都平行于某一个平面 π，并且在垂直于 π 的任何一条直线上所有的点处，这个场中的向量（就大小与方向来说）都是相等的。显然，在所有的平行于 π 的平面内，这个向量场的情形都完全相同，因此，这个向量场可以用由位于平面 π 内的向量所构成的一个**平面向量场**来完全表示出来。说到平面内的一条曲线，是意味着一个柱面，而一个区域则是意味着一个柱体。我们把平面 π 看成复平面。

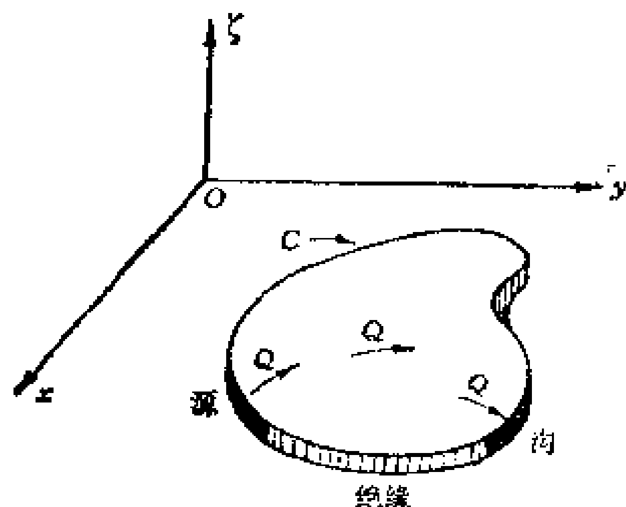


图 1.5

现在我们来讨论二维稳定热流问题，其边界曲面如图1.5所示。这平板的上、下界面被假定是完全绝缘的，没有热量被这绝缘表面所吸收或散发，这平板侧面界面的某部分曲面与热源相连（它发出热能）或与热沟相连（它吸收热能），其余的曲面是绝缘的。热能不可能流进任何完全绝缘的曲面。这样，热流密度向量将被假定是与任何绝缘边界相切的。由于假定热源和热沟的性质与坐标轴ζ是无关的，ζ垂直于xy平面，所以，平板内的向量场$\boldsymbol{Q}$仅依赖于变量x和y。平板上、下界面的绝缘性保证$\boldsymbol{Q}$只有沿x轴和y轴的分量，就是说，$\boldsymbol{Q}$有分量$Q_x(x,y)$和$Q_y(x,y)$。于是$\boldsymbol{Q}$便可表示成下述**复热流密度**形式：

$$q=q(x,y)=Q_x(x,y)+iQ_y(x,y)。\tag{1-38}$$

其中，$Q_x(x,y)$和$Q_y(x,y)$也都是复数$z=x+iy$的函数。由此可见，二维稳定热传导问题只与复数$z=x+iy$有关。

由于通过任何曲线的热流量f是单位时间内通过该曲线的热能的流量，则通过微分弧长ds的微分热流量df为

$$df=Q_n ds,\tag{1-39}$$

其中，Q_n是$\boldsymbol{Q}$在ds的外法线方向上的分量；积分

$$f=\int_C Q_n ds\tag{1-40}$$

表示向量场$\boldsymbol{Q}$经过曲线C的**热流量**，其中ds是曲线C的弧长的微分。如果用dx和dy表示沿曲线C的微分，则$dz=\boldsymbol{S}^0 ds=dx+idy$，其中$\boldsymbol{S}^0$表示切于曲线$C$的单位向量。若用$\boldsymbol{n}^0$表示垂直于曲线$C$的单位向量，则$\boldsymbol{n}^0 ds=-i\boldsymbol{S}^0 ds=dy-idx$，于是，$Q_n ds=Q_x(x,y)dy-Q_y(x,y)dx$，所以，(1-40)式可以写成

$$f=\int_C Q_x(x,y)dy-Q_y(x,y)dx。\tag{1-41}$$

热流量的面密度，即经过闭曲线C的热流量对这闭曲线所围面积A的比值，当区域A收缩成点z时所取的极限值，称为向量场在点z处的散度：

$$\operatorname{div}Q=\lim_{C\to z}\frac{1}{A}\int_C Q_n ds;\tag{1-42}$$

但是，根据格林(Green)定理，有

$$\int_C Q_n \mathrm{d}s = \iint_A \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y。 \tag{1-43}$$

显然

$$\operatorname{div} \boldsymbol{Q} = \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y}。 \tag{1-44}$$

若在点 z 处，$\operatorname{div}\boldsymbol{Q} \neq 0$，则称点 z 为**流源**（有时只有在 $\operatorname{div}\boldsymbol{Q} > 0$ 的情形才称为流源，而使 $\operatorname{div}\boldsymbol{Q} < 0$ 的点称为**流沟**）。如果在一个区域 $\mathscr{D}$ 内的每一个点处都有

$$\operatorname{div} \boldsymbol{Q} = \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0, \tag{1-45}$$

那么便说，向量场 $\boldsymbol{Q}$ 在这区域内是一个**管量场**。由上述格林定理可知，向量场 $\boldsymbol{Q}$ 在区域 $\mathscr{D}$ 内是一个管量场的充要条件是，对区域 $\mathscr{D}$ 内任何若当区域的边界曲线 C，其流量都等于零，即

$$\int_C Q_n \mathrm{d}s = 0。 \tag{1-46}$$

方程(1-45)当且仅当二维稳定热流密度向量 $\boldsymbol{Q}$ 在既没有热源又没有热沟的地方被满足。

我们熟知，热能在一介质中的传导率与在这介质中出现的温差有关，也与产生这温差间的距离有关，也就是说，与温度关于距离的改变率有关。我们继续假定二维热流的热流向量 $\boldsymbol{Q}(x, y)$ 有分量 Q_x 和 Q_y，设 $\varphi(x, y)$ 是在可导热介质中的温度，则能说明向量 $\boldsymbol{Q}$ 的分量与 $\varphi(x, y)$ 之间成立着下列关系式：

$$Q_x = -k \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y), \tag{1-47a}$$

$$Q_y = -k \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)。 \tag{1-47b}$$

这里 k 是一常数，称为**热传导系数**，它的值与所考虑的介质有关。方程(1-47a, b)等价于"$\boldsymbol{Q}$ 是负 k 乘以温度 $\varphi(x, y)$ 的梯度"。温度 $\varphi(x, y)$ 是作为"势函数"，利用方程(1-47a, b)，由它可计算 Q_x 和 Q_y。借助这些关系式，方程(1-45)可写成

$$-k\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-k\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \quad 或者 \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0。\tag{1-48}$$

因而，在稳定状态条件下，在没有源和沟的地方，导体内的温度 $\varphi(x,y)$ 是一个调和函数。

由于温度 $\varphi(x,y)$ 是一个调和函数，于是，在对应于导体内部的 xy 平面的区域内，它能被看成某一解析函数的实部。这解析函数记为 $\Phi(z)$，它就是通常所说的**复温度**。我们有

$$\Phi(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)。\tag{1-49}$$

这样，复温度 $\Phi(Z)$ 的实部就是实际的温度 $\varphi(x,y)$。这复温度的虚部，即 $\psi(x,y)$，我们称它为**流函数**，因为它与在流体中描述质点流动的流线的函数相类似。称 $\varphi(x,y)=$ 常数的曲线为**等势线**，称 $\psi(x,y)=$ 常数的曲线为**流线**，容易证明这两族曲线是互相正交的。

借助(1-47*a*, *b*)，复热流密度可通过温度改写成：

$$q=-k\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)。\tag{1-50}$$

由于 $\Phi(Z)$ 是一个解析函数，则

$$\frac{d\Phi}{dZ}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad \frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}。$$

于是，我们有

$$\overline{\left(\frac{d\Phi}{dz}\right)}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\varphi}{\partial y},\tag{1-51}$$

$$q=-k\overline{\left(\frac{d\Phi}{dZ}\right)}。\tag{1-52}$$

二、流体流动问题

由于应用于热传导的许多概念可直接搬到流体力学中来，因此，关于这个问题我们能描述得较简略一些。

假设我们讨论的是"理想流体"，就是说它是不可压缩的（它的质量密度是不改变的）和没有粘性的（没有因内部磨擦的损耗）。并且，我们假定流动是处于稳定状态的，即流体内任何一点的流动速度与时间是无关的。像热的流动一样，流体流动从流源开始，到流沟终止。

若一不可渗透的坚硬的障碍物置于运动的流体中，这时流体将沿物体的切线方向运动，很像热沿平行于绝缘边界的流动。

上一段中，我们仅限于讨论二维热流，热的传导是平行于 Oxy 平面，且只与变量 x 和 y 有关。此地，我们仅限于讨论平行于 Oxy 平面的二维流动。流动速度 $\boldsymbol{V}$ 是向量场，一般依赖于坐标 x 和 y，它类似于热流密度 $\boldsymbol{Q}$。$\boldsymbol{V}$ 沿 x 轴和 y 轴的分量是 V_x 和 V_y。速度 $\boldsymbol{V}$ 是下述定义的**复速度**联系在一起的向量：

$$v=V_x(x,y)+\mathrm{i}V_y(x,y)。\tag{1-53}$$

这式子与复热流密度 $q=Q_x(x,y)+\mathrm{i}Q_y(x,y)$ 相类似。

设 C 是一条位于流体流动区域内的曲线，积分

$$\Gamma=\int_C V_t\mathrm{d}s=\int_C V_x\,\mathrm{d}x+V_y\,\mathrm{d}y \tag{1-54}$$

叫做向量 $\boldsymbol{V}$ 沿曲线 C 的**线积分**，其中，V_t 是 $\boldsymbol{V}$ 在曲线 C 的切线方向的投影。称沿着一条闭曲线 C 的线积分为**环量**。环量的面密度，即沿闭曲线 C 的环量对这曲线所围面积 A 的比值，当 A 趋于一个点 z 时所取的极限值，叫做这向量场在点 z 处的**旋度**或**涡量**：

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}=\lim_{C\to z}\frac{1}{A}\int_C V_t\,\mathrm{d}s; \tag{1-55}$$

显然

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}=\frac{\partial V_y}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial y}。\tag{1-56}$$

向量场中使 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}\neq0$ 的点，叫做这向量场的**涡旋点**，或者简称为**涡点**。如果在区域 $\mathscr{D}$ 内每一点处都有

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}=\frac{\partial V_y}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial y}=0 \tag{1-57}$$

的话，那么便说，向量场在这一区域内是**无旋场**，或者是**位场**。由格林定理

$$\int_C V_t\,\mathrm{d}s=\iint_{\mathscr{D}}\mathrm{rot}V\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{1-58}$$

可知，区域 $\mathscr{D}$ 是位场的充要条件是对 $\mathscr{D}$ 内任何若当区域的边界曲线

C 的环量都等于零。

使向量场是一个位场的条件（1-57）说明了表达式 $V_x\,dx+V_y\,dy$ 是某一个函数 $\varphi(x,y)$ 的微分，这个函数叫做向量场的**势函数**，或者叫**位能**。从关系式

$$V_x dx+V_y dy=d\varphi$$

中可以得出

$$V_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \tag{1-59a}$$

$$V_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \tag{1-59b}$$

或者，完全同样，可以说，速度是速度势的梯度，即

$$V=\text{grad}\varphi。$$

如果向量场 V 在某一个区域 $\mathscr{D}$ 内是一个管量场，则在区域 $\mathscr{D}$ 内的每一点处都有

$$\text{div}\,V=\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}=0, \tag{1-60}$$

即在区域 $\mathscr{D}$ 内二维稳定速度向量 V 既没有流源也没有流沟。

借助关系式(1-59a,b)，方程(1-60)可写成

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0。 \tag{1-61}$$

这说明，对二维稳定速度场 V，在没有流源和没有涡点的地方，速度势 $\varphi(x,y)$ 是一个调和函数。

现在我们确定一个解析函数 $\Phi(Z)$，其实部为 $\varphi(x,y)$，其虚部 $\psi(x,y)$，称为**流函数**。这样

$$\Phi(Z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y) \tag{1-62}$$

称为**复势**。

复势与流动速度之间有简单的关系。从方程（1-62）、（1-59a,b）和(1-53)，我们有

$$v=V_x+iV_y=\overline{\left(\frac{d\Phi(Z)}{dZ}\right)}。 \tag{1-63}$$

三、静电场问题

在静电学中，电荷是稳定的，正电荷为电流动的源，负电荷为电

流动的沟。换句话说，电的流动从正电荷出发，而被负电荷所吸收。

我们讨论 Oxy 平面的静电场。设 $\boldsymbol{D}$ 是电流密度向量，$\boldsymbol{E}$ 是电场向量，它们在 x 轴和 y 轴的分量分别是 D_x 和 D_y，E_x 和 E_y，它们分别对应于下述复变函数：

$$d(z)=D_x(x,y)+\mathrm{i}D_y(x,y), \tag{1-64a}$$

$$e(z)=E_x(x,y)+\mathrm{i}E_y(x,y), \tag{1-64b}$$

函数 $d(z)$, $e(z)$ 分别称为**复电流密度**和**复电场**，且 $D=\varepsilon E$。这里 ε 是正常数，称为**介电常数**。线积分

$$\Gamma=\int_C E_t\cdot \mathrm{d}s$$

表示静电场的力沿着路线 C 所作的功，其中 E_t 表示向量 $\boldsymbol{E}$ 在曲线 C 的切线方向的投影。向量 $\boldsymbol{E}$ 的沿着任何一条闭路线的环量都等于零，因为静电场的维持并不需要耗费能量。事实上，假如沿着某一条闭曲线 C 的环量不等于零，那么，朝一定的方向绕行这路线无限多次，我们便会得到一个无限的能源（永动机）了。由此可知，在静电场内的任何一点处都有

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E}=\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=0。 \tag{1-65}$$

因此，静电场总是一个位场，这就是说，存在一个单值函数 $\varphi(x,y)$，使得

$$E_x=-\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad E_y=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}; \tag{1-66a}$$

$$\mathrm{D}_x=-\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad \mathrm{D}_y=-\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial y}; \tag{1-66b}$$

其中称 $\varphi(x,y)$ 为静电场的**电位**。

如果在区域 $\mathscr{D}$ 内没有电荷，那么在 $\mathscr{D}$ 内处处有

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}=0。 \tag{1-67}$$

借助关系式(1-66)，方程(1-67)可写成

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0。 \tag{1-68}$$

这说明，对二维稳定静电场，在没有电荷的区域内，电位 $\varphi(x,y)$是一个调和函数。在这区域内，存在一个解析函数 $\Phi(Z)$，其实部为 $\varphi(x,y)$；其虚部 $\psi(x,y)$称为**力函数**。函数

$$\Phi(Z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y) \tag{1-69}$$

称为**复电位**。于是，由方程(1-64)、(1-66)和(1-69)，我们有

$$d(Z)=-\varepsilon\left(\overline{\frac{d\Phi(Z)}{dZ}}\right) \quad 和 \quad e(Z)=-\left(\overline{\frac{d\Phi(Z)}{dZ}}\right)。 \tag{1-70}$$

其它如物质扩散和静磁场，调和函数也是有用的。

四、渗流问题

液体、气体或含气液体在多孔介质中的流动叫渗流或泸流。多孔介质可作为含有大量相互结合的孔穴或交叉裂缝的刚体。

真实土壤颗粒的形状和大小，以及它们排列的情况是很复杂的，是没有规律的，因此在研究多孔介质的物理性质时，我们只能按照一些平均的性质来判断它们的渗流性态。在研究渗流时，并不注意流体在孔穴或裂缝中的运动形式，也不计及孔穴或裂缝的形状，而只确定渗流流动的平均性质，如速度、压力和流量等。在土壤的渗流性能中，孔量系数 m 是一个极重要的特性量：

$$m=W'/W, \tag{1-71}$$

其中，W 表示试样的总体积，W' 是试样中孔穴的体积。

流体在土壤等多孔介质的孔穴或岩石的缝隙里的流动现象是极复杂的，因为孔穴和缝隙的分布是极复杂的、是没有规律的。因此，我们不能确定流体在孔穴或缝隙中任何一点处的速度，但是，我们有可能知道多孔介质中流体的**平均流动速度**的大小 v^*：

$$v^*=\frac{\Delta Q}{\Delta W'},$$

其中，ΔQ 表示通过小块面积 ΔW 的实际流量，$\Delta W'$ 是这小块面积中所有孔穴和裂缝的截面面积，即

$$v^*=\Delta Q/m\cdot\Delta W。 \tag{1-72}$$

为便于研究，在研究渗流时，我们假定流体的运动充满所有的空

间，即充满孔穴、裂缝和介质骨骼所占的空间。这种把连续地充满着介质的骨骼和孔穴的体积的同一流体运动，称为**假想渗流**。我们就用这种假想渗流来代替多孔介质中的真实渗流。在多孔介质中任意指定的一块面积上，假想渗流的流量等于通过这块面积的真实流量。

设通过面积 ΔW 的流体的实际流量为 ΔQ，我们定义假想渗流的速度 v 为

$$v=\Delta Q/\Delta W,$$

因此

$$v=mv^*<v^*。\qquad (1-73)$$

我们仅限于讨论二维稳定渗流，它们对应于那些平行于一个平面的空间渗流。取这个平面为 xy 平面。在渗流区的每一个点 z 处都有一个速度向量 V，其在 x 轴和 y 轴的分量为 V_x 和 V_y，其相应的复速度为

$$v=V_x+iV_y。\qquad (1-74)$$

根据渗流理流中的达西(Darcy)定律*，若多孔介质是匀质的和各向同性的，则

$$V_x=-k\frac{\partial h}{\partial x},\qquad (1-75a)$$

$$V_y=-k\frac{\partial h}{\partial y},\qquad (1-75b)$$

其中，$h(x,y)$是在点(x,y)处的地下水的水位标高，简称为**水头**，k 称为**渗流系数**，或称为**水动力传导系数**，它是常数。

假定多孔介质是不可变形的，而流体是不可压缩的，根据质量守恒定律，我们能证明其连续性方程为

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}=0.\qquad (1-76)$$

将方程(1-75a,b)代入(1-76)，我们有

$$-k\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}-k\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=0,\quad 或者\quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=0。\qquad (1-77)$$

这表明，若多孔介质是匀质的、各向同性的和不可变形的，又假设多

* B·N·阿拉夫、C.H.努美罗夫著，王仁东译：渗流理论，高教出版社，1959.

孔介质中的流体是不可压缩的，则水头 $h(x,y)$ 是一个调和函数。于是，在上述渗流区域内，存在一个解析函数 $\Phi(Z)$，其实部 $\varphi(x,y)=-kh(x,y)$，其虚部 $\psi(x,y)$ 称为流函数。函数

$$\Phi(z)=\varphi(x,y)+\mathrm{i}\psi(x,y) \tag{1-78}$$

称为**渗流复势**。由方程(1-78)和(1-75a, b)，则得

$$h(x,y)=-\frac{1}{k}\mathrm{Re}\Phi(z), \tag{1-79a}$$

$$\left(\overline{\frac{\mathrm{d}\Phi(z)}{\mathrm{d}z}}\right)=V_x+\mathrm{i}V_y=v, \tag{1-79b}$$

$$p(x,y)=-c\cdot\mathrm{Re}\Phi(z),\quad c=\frac{\mu}{k}, \tag{1-79c}$$

其中，$p(x,y)$ 表示渗流流体在点 (x,y) 处的动压力，μ 是流体的粘性系数，k 是土壤的渗透系数。因此，若知道渗流的复势 $\Phi(z)$，就能得到所要求的水头 $h(x,y)$、渗流速度 V_x，V_y 和动压力 $p(x,y)$。

我们将上述对热传导、流体流动、静电场和渗流的讨论总结成表 1-1。

表 1-1

	热传导	流体流动	静电场	渗流
流动密度向量	Q = 热流动密度	V = 速度	D = 电流动密度	V = 渗流速度
复流动函数	$q=Q_x+\mathrm{i}Q_y$	$v=V_x+\mathrm{i}V_y$	$d=D_x+\mathrm{i}D_y$	$v=V_x+\mathrm{i}V_y$
调和势函数 φ	温度	速度势	静电势	速度势
流动密度分量	$Q_x=-k\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ $Q_y=-k\frac{\partial\varphi}{\partial y}$	$V_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ $V_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}$	$D_x=-\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ $D_y=-\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial y}$	$V_x=-k\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ $V_y=-k\frac{\partial\varphi}{\partial y}$
复流动密度与复势 $\Phi=\varphi+\mathrm{i}\psi$	$q=-k\left(\overline{\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z}}\right)$	$v=\left(\overline{\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z}}\right)$	$d=-\varepsilon\left(\overline{\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z}}\right)$	$v=-k\left(\overline{\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z}}\right)$

例 1-4 设复势为

$$\Phi(z)=Az+B,\ A \text{ 和 } B \text{ 都是实数。} \tag{1-80}$$

试讨论其静电场、热传导、流体流动和渗流的等势线、流线和流动密度。

解 势函数为

$$\varphi(x,y)=\mathrm{Re}(Az+B)=Ax+B, \tag{1-81}$$

流函数为

$$\psi(x,y)=\mathrm{Im}(Az+B)=Ay。 \tag{1-82}$$

由于等势线为使 $\varphi(x,y)=c_1$ 的迹线，由方程(1-81)可知，在等势线上 x 取常数，如图 1.6 中垂直直线所示。由于流线为使 $\psi(x,y)=c_2$ 的迹线，由方程(1-82)可知，在流线上 y 取常数，如图 1.6 中水平虚直线所示。

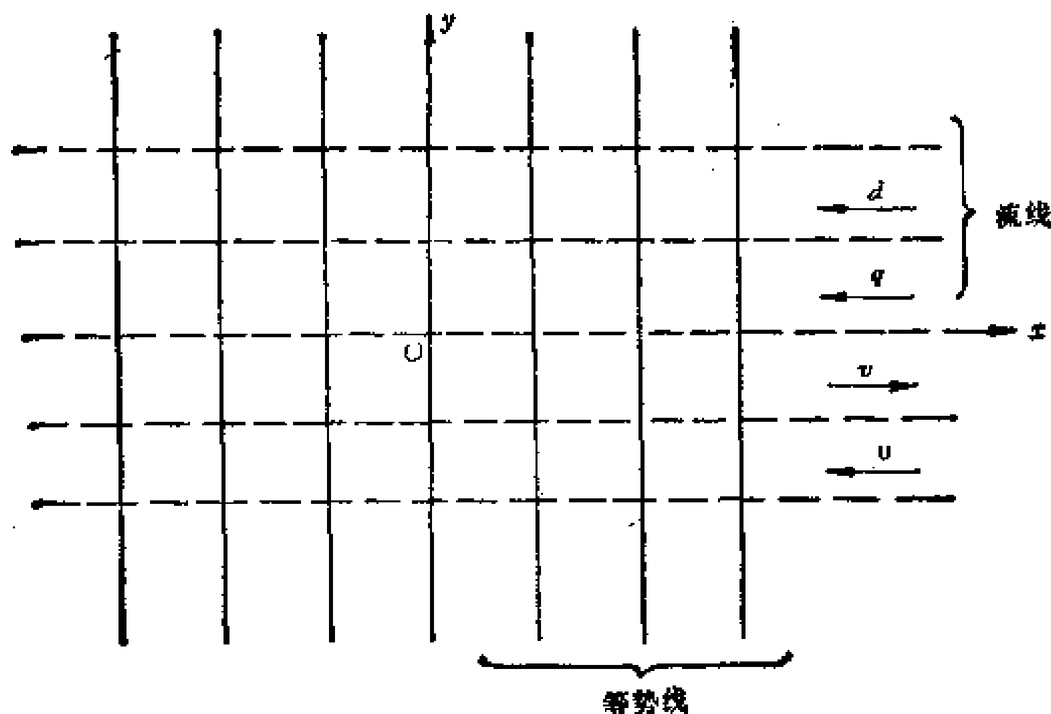


图 1.6

若 $\Phi(z)$是复温度，则其等温线就是图 1.6 中的等势线，复热流密度是

$$q=-k\,\overline{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(Az+B)}=-kA=Q_x+\mathrm{i}Q_y。$$

由此可知，$Q_x=-kA, Q_y=0$。这热流是均匀的，且若 $A>0$，则其流

动为负 x 轴方向。

若 $\Phi(z)$是流动复势，则流动速度是

$$v=V_x+\mathrm{i}V_y=\overline{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(Az+B)}=A,$$

因此，$V_x=A, V_y=0$，流体流动是均匀的，如图 1.6 所示，若 $A>0$，则如图 1.6 所示，它是向右流动的。

若 $\Phi(z)$是复电位，则复流动密度是

$$d=-\varepsilon\,\overline{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(Az+B)}=-\varepsilon A,$$

因此，$D_x=-\varepsilon A, D_y=0$。这电流动密度向量是平行于 x 轴的。若 $A>0$，则如图 1.6 所示，它是向左流动的。

若 $\Phi(z)$是渗流复势，则其复速度是

$$v=-\overline{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(Az+B)}=-A,$$

因此，$V_x=-A, V_y=0$，渗流是均匀的，且平行于 x 轴。若 $A>0$，则如图 1.6 所示，它是向左流动的。

习　题

1．设 $f(z)$给定如下，决定 $f'(z)$在 z-平面上何处存在：

(1) $c+\mathrm{i}d$, c 和 d 是常数；　(2) $(x^2+xy)-\mathrm{i}(y+1)$；

(3) $(x+1)+\mathrm{i}y^2$；　(4) $(x^2-y^2-2xy)+\mathrm{i}(x^2-y^2+2xy)$；

(5) x；　(6) $e^{x^2-y^2}(\cos 2xy+\mathrm{i}\sin 2xy)$；

(7) $e^{x^2+y^2}(\cos 2xy+\mathrm{i}\sin 2xy)$；　(8) $x/(x^2+y^2)-\mathrm{i}y/(x^2+y^2)$。

2．对 z 的什么值，下列每个函数具有导数？

(1) $f(z)=\bar{z}=x-\mathrm{i}y$；　(2) $f(z)=(\bar{z})^2$；

(3) $f(z)=z\mathrm{Re}z$；　(4) $f(z)=z|z|$；

(5) $f(z)=z/\bar{z}$。

3．证明下列每个函数是整函数，求出导数的表达式及其在点 $x=1, y=1$ 的数值：

(1) $x^3-3xy^2+\mathrm{i}(3x^2y-y^3)$；

(2) $-e^{2x}\sin 2y+\mathrm{i}e^{2x}\cos 2y$；

(3) $e^{x^2-y^2}\cos 2xy+ie^{x^2-y^2}\sin 2y$。

4. 证明：若 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在某区域上是解析的，则 $g(z)=v-iu$ 在这区域上必定也是解析的。

5. (1)若解析函数在某个区域上是纯实数，则它在那个区域上必定是常数；

(2)若在(1)中将纯实数代之以"纯虚数"，则上述结论仍成立。

6. 假设 $f(z)=u+iv$ 是解析的，在什么情况下 $g(z)=u-iv$ 是解析的？(提示：考虑函数 $f(z)+g(z)$和 $f(z)-g(z)$，并参考习题5。)

7. 若解析函数 $f(z)=u+iv$ 在某个区域上的模$|f(z)|$等于常数 k，证明这只能仅当 $f(z)$在那个区域上恒等于常数时发生。(提示：若 $k\neq0$,我们有 $u^2+v^2=k^2$ 或 $k^2/(u+iv)=u-iv$，再参考习题6。)

8. 下列函数中哪个函数是调和的？

(1) x^2+y^2； (2) $\sin x\cos y$；

(3) $x/(x^2+y^2)$； (4) $e^x\cos y+x+y$。

9. 设 $\varphi(x,y)=4x^3y-4xy^3+x+1$。

(1) 证明 $\varphi(x,y)$能是某个解析函数的实部；

(2) 若 $\varphi(x,y)$是解析函数的实部，求虚部；

(3) 若 $\varphi(x,y)$是解析函数的虚部，求实部。

10. 设 $\Phi(z)=e^x\cos y+ie^x\sin y$ 是复电位。

(1) 用复电位找出在 $x=1,y=1/2$ 处的复电场；

(2) 首先找出静电场的电位 $\varphi(x,y)$，然后用它求出在上述点的复电场；

(3) 设 $\varepsilon=8.85\times10^{-12}$，求出在 $x=1,y=1/2$ 处的电流密度向量的分量 D_x 和 D_y。

11. 设 $\Phi(z)=(\cos\alpha-\sin\alpha)z$ 是复势，$\alpha>0$。

(1) 描绘其等势线并给出其方程；

(2) 描绘其流线并给出其方程；

(3) 找出在点(x,y)处的速度分量 V_x 和 V_y，并且回答：取什么角度能使速度向量为正实轴方向？

§3 幂级数与初等函数

3.1 幂级数

设$\{a_n\}(n\geqslant0)$是一个复数序列，称级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ **收敛到**a，当且仅

当，对于每一个 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使得当 $m\geqslant N$ 时，$\left|\sum_{n=0}^{m}a_n-a\right|<\varepsilon$。如果 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ **绝对收敛。**

命题 1 如果 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，那么 $\sum a_n$ 收敛。

证明 设 $\varepsilon>0$，令 $S_n=a_0+a_1+\cdots+a_n$，因为 $\sum|a_n|$ 收敛，所以存在正整数 N，使得 $\sum_{n=N}^{\infty}|a_n|<\varepsilon$。于是，如果 $m\geqslant k\geqslant N$，则

$$|S_m-S_k|=\left|\sum_{n=k+1}^{m}a_n\right|\leqslant\sum_{n=N}^{\infty}|a_n|<\varepsilon,$$

即 $\{S_n\}$ 是柯西序列。所以在 $\mathscr{C}$ 内有一点 S，$S=\lim_{n\to\infty}S_n$。因此 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=S$。

考虑幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 或 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$。前者是在原点附近的幂级数，后者是在点 a 附近的幂级数。幂级数的一个最简单的例子（也是最有用的）是几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$。容易看出，$(1-z)(1+z+\cdots+z^n)=1-z^{n+1}$。所以

$$1+|z|+\cdots+|z|^n=\frac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|}。$$

由于当 $|z|<1$ 时，$\lim_{n\to\infty}|z|^n=0$，所以，几何级数是绝对收敛的，并且有

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}。$$

如果 $|z|>1$，那么 $\lim_{n\to\infty}|z|^n=\infty$，此时，级数**发散**。

定理 1 对于给定的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$，定义

$$R=1/\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n},\tag{1-83}$$

$0\leqslant R\leqslant\infty$。那么

（1）如果 $|z-a|<R$，则级数绝对收敛；

(2) 如果$|z-a|>R$，则级数的项无界，所以级数发散；

(3) 如果 $0<r<R$，则级数在闭圆域$|z|\leqslant r$ 上一致收敛，并且具有性质(1)和(2)的数 R 是唯一的。

证明 (1)不妨假定 $a=0$。如果$|z|<R$，那么有一 r，满足$|z|<r<R$。由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup|a_n|^{1/n}=\lim\limits_{n\to\infty}[\sup\{|a_n|^{1/n},|a_{n+1}|^{1/n+1},\cdots\}]$，注意到$\frac{1}{R}<\frac{1}{r}$，所以存在正整数 N，使得当 $n\geqslant N$ 时，$|a_n|^{1/n}<\frac{1}{r}$，即$|a_n|<\frac{1}{r^n}$。因此，当 $n\geqslant N$ 时，$|a_nz^n|<\left(\frac{|z|}{r}\right)^n$。故对于每个 z，$|z|<R$，幂级数 $\sum a_nz^n$ 是绝对收敛的。

设 $r<R$，选取 ρ 使得 $r<\rho<R$，如上所证，存在正整数 N，使得对所有的 $n\geqslant N$，$|a_n|<\frac{1}{\rho^n}$。于是，如果 $|z|\leqslant r$，便有 $|a_nz^n|<\left(\frac{r}{\rho}\right)^n$，$\left(\frac{r}{\rho}\right)<1$。因此，幂级数在$|z|\leqslant r$ 上是一致绝对收敛的。

最后证明(2)。设$|z|>R$。选取 $|z|>r>R$，因此$\frac{1}{r}<\frac{1}{R}$。由 limsup 的定义，有无穷多个n使得$\frac{1}{r}<|a_n|^{1/n}$。对这些 n，我们有$|a_nz^n|>\left(\frac{|z|}{r}\right)^n$。因$\left(\frac{|z|}{r}\right)>1$，所以这些项是无界的，故级数是发散的。

数 R 称为幂级数 $\sum a_n(z-a)^n$ 的**收敛半径**。若 $R=\infty$，则该幂级数在复平面 $\mathscr{C}$ 上收敛。

命题 2 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$ 是一个给定的幂级数，其收敛半径为 R，则

$$R=\lim_{n\to\infty}|a_n/a_{n+1}|, \tag{1-84}$$

如果右边的极限存在。

证明 不妨设 $a=0$，并设 $\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}|a_n/a_{n+1}|$存在，以及$|z|<r<\alpha$。由于存在正整数 N，使得当 $n\geqslant N$ 时，$r<|a_n/a_{n+1}|$。即 $r|a_{n+1}|<|a_n|$。反复利用这个不等式，于是，对任何 $n>N$，我们有

$$|a_n r^n| = r|a_n|r^{n-1} < |a_{n-1}|r^{n-1} < \cdots < |a_N|r^N.$$

令 $B = |a_N|r^N$，因而，对一切 $n>N$，

$$|a_n z^n| = |a_n r^n|\frac{|z|^n}{r^n} < B\left(\frac{|z|}{r}\right)^n。$$

由于 $|z|<r$ 和几何级数的收敛性，故级数 $\sum a_n z^n$ 在 $|z|<r$ 内是绝对收敛的。由于 $r<\alpha$ 是任意的，所以 $\alpha \leqslant R$。

另一方面，如果 $|z|>r>\alpha$，那么存在正整数 N，使得当 $n\geqslant N$ 时，$|a_n|<r|a_{n+1}|$。如前所述，对于 $n\geqslant N$，有 $|a_n r^n|>B=|a_N|r^N$，于是 $|a_n z^n|>B\left(\frac{|z|}{r}\right)^n$，它当 $n\to\infty$ 时趋于 ∞，故级数 $\sum a_n z^n$ 发散。所以 $R\leqslant\alpha$，于是 $R=\alpha$。

为了今后的需要，我们回顾一下无穷级数的下述命题（此处不予证明）。

命题 3 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ 是两个绝对收敛的级数，令

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$$

那么 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ 是绝对收敛的，且其和为 $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\right)$。

命题 4 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$ 是收敛半径 $\geqslant r>0$ 的两个幂级数，令

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$$

那么幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(z-a)^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的收敛半径都大于或等于 r，并且对于 $|z-a|<r$，有

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n, \qquad (1\text{-}85)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} b^n(z-a)^n\right]。 \qquad (1\text{-}86)$$

定理 2 设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ 的收敛半径 $R>0$，则 $f(z)$ 在其

收敛圆$|z-a|<R$ 内是解析的，并且 $z'(z)=\sum_{n=0}^{\infty} na_n(z-a)^{n-1}$，$f'(z)$ 的收敛半径也是 R。

证明 不妨设 $a=0$。由于 $\sum a_n z^n$ 在$|z|<R$ 内是收敛的，若 $0<\rho<R$，则 $a_n\rho^n$ 是有界的，比如说$|a_n\rho^n|<K$。令

$$\varphi(z)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}。$$

由于 $n^{1/n}\to 1(n\to\infty)$，$\limsup_{n\to\infty}|na_n|^{1/n}=\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}=1/R$，于是级数 $\varphi(z)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$ 与原来的级数 $\sum a_n z^n$ 有相同的收敛半径。

为方便计，记$|z|=r$，$|h|=\eta$，则若 $r<\rho$ 和 $r+\eta<\rho$，那么

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n\left\{\frac{(z+h)^n-z^n}{h}-nz^{n-1}\right\}\right]。$$

但是

$$\left|\frac{(z+h)^n-z^n}{h}-nz^{n-1}\right|=\left|\frac{n(n-1)}{2!}z^{n-2}h+\cdots+h^{n-1}\right|$$
$$\leqslant\frac{n(n-1)}{2!}r^{n-2}\eta+\cdots+\eta^{n-1}=\frac{(r+\eta)^n-r^n}{\eta}-nr^{n-1}。$$

因此

$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-\varphi(z)\right|\leqslant K\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\rho^n}\left\{\frac{(r+\eta)^n-r^n}{\eta}-nr^{n-1}\right\}$$
$$=K\left\{\frac{1}{\eta}\left(\frac{\rho}{\rho-r-\eta}-\frac{\rho}{\rho-r}\right)-\frac{\rho}{(\rho-r)^2}\right\}$$
$$=\frac{K\rho\eta}{(\rho-r-\eta)(\rho-r)^2},$$

它当 $\eta\to 0$ 时趋于零。因此，$f(z)$有导数 $\varphi(z)$。这证明单值函数 $f(z)$ 在$|z|<R$ 内是可微的，故 $f(z)$在$|z|<R$ 内是解析的。

推论 设函数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ 的收敛半径 $R>0$，那么，对于每个$k\geqslant 1$，$f(z)$是 k 次可微的，并且在$|z|<R$ 内

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z-a)^{n-k}。$$

这就是说，在 $f(z)$ 的收敛圆域 $|z|<R$ 内，幂级数可逐项求导任意次。

3.2 指数函数

对于实变数的指数函数 $\exp x$，即 e^x，一种方法是将它定义成下述幂级数的和函数：

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots,$$

利用绝对收敛级数的乘积定理，可证明

$$\exp x \cdot \exp x' = \exp(x + x')。$$

我们能用同样的方法将复变数的指数函数 $\exp z$ 定义成：

$$\exp z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots; \qquad (1\text{-}87)$$

由命题2，这个级数的收敛半径是 $+\infty$。因此，对于每个复数，它是收敛的，所以它是全复平面上的单值函数。由命题4，对任何复数 z 和 z'，我们有

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z'^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+z')^n}{n!},$$

即 $\exp z \cdot \exp z' = \exp(z+z')$，或 $e^z \cdot e^{z'} = e^{z+z'}$。

对实数 y，我们有

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

但是，由于实变量 y 的 $\cos y$ 和 $\sin y$ 分别为

$$\cos y = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin y = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad (1\text{-}88)$$

由是，我们获得欧拉公式

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \qquad (1\text{-}89)$$

因此

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)。 \qquad (1\text{-}90)$$

由于$|e^{iy}|=|\cos y+i\sin y|=1$，$e^x>0$，所以$|e^z|=e^x$。类似地，$\arg e^z=\operatorname{Im}z=y$。函数 e^z 有周期$2\pi i$；换言之，若 k 是正的或负的整数，或零，则

$$e^z=e^{z+2\pi i}=e^{z+2k\pi i},$$

因为当 z 增加 $2\pi i$，y 增加 2π 时，$\cos y$ 和 $\sin y$ 的值都保持不变。因此，e^z 所能取到的值都在无限条形 $-\pi<y\leqslant\pi$ 中，或在这条形经过平行移动所得到的任何条形中取到。

容易证明：e^z 没有其它的周期。若 $e^z=e^\zeta$，$\zeta=\xi+i\eta$，则必须有 $z=\zeta+2k\pi i$。因为 $e^{z-\zeta}=1$，于是

$$e^{x-\xi}[\cos(y-\eta)+i\sin(y-\eta)]=1。$$

因此，$x-\xi=0$，$\cos(y-\eta)=1$，$\sin(y-\eta)=0$；这导致 $y-\eta=2k\pi$，故 $z-\zeta=2k\pi i$。

最后，e^z 决不等于零。因为 $e^{z_1}e^{-z_1}=1$，但若 $e^{z_1}=0$，由于 e^{-z_1} 是个有限数，因而 $e^{z_1}e^{-z_1}=0$，这是不可能的，故 $e^z\neq0$。

根据(1-42)式及§3.1 中的定理 2 可知，e^z 是全复平面 $\mathscr{C}$ 上的解析函数，且其导数就是 e^z，即 $(e^z)'=e^z$。可见 e^z 是整函数。

3.3 三角函数与双曲函数

对于实变数 x 的 $\sin x$ 和 $\cos x$，它们分别是上述(1-88)式中两个幂级数的和函数，当 z 是复数时，我们就用这些幂级数来定义 $\sin z$ 和 $\cos z$。于是

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad \cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}。\tag{1-91}$$

由于上述每个幂级数的收敛半径是 $+\infty$，因此 $\sin z$ 和 $\cos z$ 都是整函数。

根据上述定理 2，立即可得 $\sin z$ 和 $\cos z$ 的导函数

$$(\sin z)'=\cos z,\quad (\cos z)'=-\sin z。$$

其它三角函数被定义成：

$$\operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z},\quad \operatorname{ctg} z=\frac{1}{\operatorname{tg} z},$$

$$\sec z=\frac{1}{\cos z},\quad \csc z=\frac{1}{\sin z}。\tag{1-92}$$

由

$$e^{\pm iz}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\pm iz)^n}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!}\pm i\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

即得

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z,$$

$$e^{-iz}=\cos z-i\sin z。$$

于是，我们有

$$\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz}),\qquad \sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})。\tag{1-93}$$

从这些公式和函数 e^z 的加法公式，我们有

$$\sin^2 z+\cos^2 z=1;$$

并且加法定理：

$$\sin(z\pm\zeta)=\sin z\cos\zeta\pm\cos z\sin\zeta,\tag{1-94}$$

$$\cos(z\pm\zeta)=\cos z\cos\zeta\mp\sin z\sin\zeta\tag{1-95}$$

对一切复数成立。像一切初等的三角函数恒等式是由这些方程经代数运算推导出来的一样，一切这种三角函数的恒等式对复变数也是成立的。

复变数的双曲函数也可同实变数一样定义成：

$$\operatorname{sh} z=\frac{1}{2}(e^z-e^{-z}),\qquad \operatorname{ch} z=\frac{1}{2}(e^z+e^{-z})。\tag{1-96}$$

这两个函数在任何有界区域内是解析的。

容易证明下述重要关系式：

$$\sin iz=i\operatorname{sh} z,\quad \cos iz=\operatorname{ch} z,\tag{1-97}$$

$$\operatorname{sh} iz=i\sin z,\quad \operatorname{ch} iz=\cos z,\tag{1-98}$$

这些关系式对由三角函数的性质推导双曲函数的相应性质有很大的用处。

若 $z=x+iy$，则

$$\sin z=\sin x\operatorname{ch} y+i\cos x\operatorname{sh} y, \tag{1-99}$$

$$\cos z=\cos x\cdot\operatorname{ch} y-i\sin x\cdot\operatorname{sh} y。 \tag{1-100}$$

于是可知，$\sin z=0$ 仅当

$$\sin x\cdot\operatorname{ch} y=0,\quad \cos x\cdot\operatorname{sh} y=0$$

时成立。但是 $\operatorname{ch} y\geqslant 1$，因而第一个方程含有 $\sin x=0$，因此 $x=n\pi$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$。于是，第二个方程成为 $\operatorname{sh} y=0$，它只有一个根 $y=0$。因此，$\sin z=0$ 当且仅当 $z=n\pi(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时成立。同样地，我们能证明 $\cos z=0$ 当且仅当 $z=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ 时成立。

例 1-5 求 $\cos i$。

解 注意到 $\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})$，则得

$$\cos i=\frac{1}{2}(e^{-1}+e^{1})=\operatorname{ch} 1。$$

例 1-6 求 $\sin(1+2i)$。

解 为此，我们将利用上述公式(1-94)、(1-99)和(1-100)，便得到

$$\begin{aligned}\sin(1+2i)&=\sin 1\cos 2i+\cos 1\cdot\sin 2i\\&=\sin 1\cdot\operatorname{sh} 2+i\cos 1\cdot\operatorname{sh} 2。\end{aligned}$$

3.4 对数函数、一般幂函数的反三角函数

对数函数定义为指数函数的反函数。

若 $e^{w}=z$，这里 $z\neq0$，则数 w 称为数 z 的**对数**，且记为

$$w=\operatorname{Log} z。$$

若 $w=u+iv$，如前所述，则 $|e^{w}|=e^{u}$ 和 $\operatorname{Arg}e^{w}=v$。由于 $e^{w}=z$，则 $e^{u}=|z|$，故 $u=\log|z|$；$v=\operatorname{Arg} z$，所以

$$\operatorname{Log} z=\log|z|+i\operatorname{Arg} z=\log|z|+i\arg z+2k\pi i。 \tag{1-101}$$

由于 $\operatorname{Arg} z$ 是多值的，所以对数函数是多值函数。称对应 $\operatorname{Arg} z$ 的主值 $\arg z$ 的 $\log|z|+i\arg z$ 为 $\operatorname{Log} z$ 的主值支，记为 $\log z$。

例 1-7 求 $\log(-1)$和 $\operatorname{Log}(-1)$。

解 数 -1 的模等于 1，而其幅角的主值等于 π，所以

$$\log(-1)=\log 1+\pi i=\pi i,$$

而　　$\operatorname{Log}(-1)=\pi i+2k\pi i=(2k+1)\pi i \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$。

例 1-8　求 $\log(3+4i)$ 和 $\operatorname{Log}(3+4i)$。

解　数 $3+4i$ 的模等于 $\sqrt{3^2+4^2}=5$，而其幅角的主值等于 $\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}$，所以

$$\log(3+4i)=\log 5+i\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3},$$

$$\operatorname{Log}(3+4i)=\log 5+i\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}+2k\pi i \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)。$$

由于

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2)=\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2,$$

$$\operatorname{Arg}(z_1/z_2)=\operatorname{Arg} z_1-\operatorname{Arg} z_2$$

$$\operatorname{Arg}(z^n)=n \operatorname{Arg} z,$$

$$\operatorname{Arg}(\sqrt[n]{z})=\frac{1}{n}\operatorname{Arg} z,$$

(n 是正整数或负整数)，由公式(1-101)便得自变量为复数的对数函数具有实自变量的对数函数的下列熟知的性质：

$$\operatorname{Log}(z_1 z_2)=\operatorname{Log} z_1+\operatorname{Log} z_2,$$

$$\operatorname{Log}(z_1/z_2)=\operatorname{Log} z_1-\operatorname{Log} z_2,$$

$$\operatorname{Log}(z^n)=n \operatorname{Log} z,$$

$$\operatorname{Log}(\sqrt[n]{z})=\frac{1}{n}\operatorname{Log} z。$$

关于一般的幂函数，若 z 和 ζ 是任何复数，$\zeta \neq 0$，我们定义

$$\zeta^z=e^{z \operatorname{Log} \zeta}。 \tag{1-102}$$

因此，一般地说，ζ^z 有无穷多个值，但是当主值 $\arg \zeta$ 取定后，其主值是唯一的。

例 1-9　求 i^i。

解

$$i^i=\exp(i \operatorname{Log} i)=\exp\{i(\log i+2k\pi i)\}$$

$$=\exp\left\{i\left(\frac{1}{2}\pi i+2k\pi i\right)\right\}=\exp\left(-\frac{1}{2}-2k\right)\pi$$

$$(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)。$$

所以 i^i 的主值等于 $e^{-\pi/2}$。

例1-10 求 2^{1+i}。

解

$$2^{1+i}=e^{(1+i)\mathrm{Log}\,2}=e^{(1+i)(\log 2+2k\pi i)}=e^{(\log 2-2k\pi)+i(\log 2+2k\pi)}$$

$$=e^{\log 2-2k\pi}(\cos\log 2+i\sin\log 2)\quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)。$$

我们已经知道，三角函数和双曲函数都可以用指数函数来表示，因此反三角函数和反双曲函数也可以用对数函数来表示。例如，让我们来求 $w=\operatorname{arc}\cos z$ 的对数表示式。按照定义有

$$z=\cos w=\frac{1}{2}(e^{iw}+e^{-iw}),$$

因之有
$$e^{2iw}-2ze^{iw}+1=0,$$
即
$$e^{iw}=z+\sqrt{z^2-1}。$$
所以，我们就有

$$w=\operatorname{arc}\cos z=-i\,\mathrm{Log}(z+\sqrt{z^2-1});$$

在解二次方程时，所用公式中的“±”号可以省去，只要把根式看作双值函数就行了。由关系式

$$(z+\sqrt{z^2-1})\cdot(z-\sqrt{z^2-1})=1,$$

看出：根式前的符号改变，就使得对数前的符号改变，所以最后一式中的“-”号也可以不写：

$$w=\operatorname{arc}\cos z=i\,\mathrm{Log}(z+\sqrt{z^2-1})。\tag{1-103}$$

对于其它的函数，也可以给出类似的公式：

$$\begin{cases}\operatorname{arc}\sin z=\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arc}\cos z=\dfrac{\pi}{2}-i\,\mathrm{Log}(z+\sqrt{z^2-1}),\\ \operatorname{arc}\mathrm{tg}\, z=\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arc}\mathrm{ctg}\, z=\dfrac{1}{2i}\mathrm{Log}\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right),\\ \operatorname{arc}\mathrm{sh}\, z=\mathrm{Log}(z+\sqrt{z^2+1}),\\ \operatorname{arc}\mathrm{ch}\, z=\mathrm{Log}(z+\sqrt{z^2-1}),\\ \operatorname{arc}\mathrm{th}\, z=\dfrac{1}{2}\mathrm{Log}\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right),\\ \operatorname{arc}\mathrm{cth}\, z=\dfrac{1}{2}\mathrm{Log}\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)。\end{cases}\tag{1-104}$$

3.5 多值函数的单值分支

在§2.4中关于解析函数的定义中，我们注意到解析函数必须是单值的。不少初等函数，如 z^a(a 不是整数)，$\operatorname{Log} z$, $\arcsin z$ 等是多值的。要研究这些多值函数的解析性，必须首先考虑将它分成若干个单值的连续分支。下面我们就来讨论将常见的一些多值函数分成单值的连续分支。

在§1.2中，我们曾讨论过复数 $\sqrt[n]{z}$，在极坐标系统下，有

$$\sqrt[n]{z}=|z|^{1/n}\left(\cos\frac{\arg z+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\arg z+2k\pi}{n}\right), \quad (1-105)$$

其中 $\arg z$ 表示 z 的幅角的主值，$k=0,1,2,\cdots,n-1$。于是可见，作为 $z(\neq 0)$ 的函数，$w=\sqrt[n]{z}$ 是一个 n 值函数。通常，主值 $\arg z$ 是取成满足 $-\pi<\arg z\leqslant\pi$ 的那个幅角。我们将复平面 $\mathscr{C}$ 沿负实轴割开，得到区域 $\mathscr{D}$，即 $\mathscr{D}=\mathscr{C}-\{z: z\leqslant 0\}$。在区域 $\mathscr{D}$ 上，由于 $\arg z$ 是一个单值的连续函数，对每一个给定的整数 k，$0\leqslant k\leqslant n-1$，函数

$$\begin{aligned} w_k &= |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\arg z+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\arg z+2k\pi}{n}\right)\\ &= |z|^{1/n}e^{i(\arg z+2k\pi)/n}\end{aligned}$$

是区域 $\mathscr{D}$ 上的一个单值连续函数，并且是单叶的，它是 $z=w^n$ 的反函数，根据反函数的导数定理，它便有完全确定的导数值

$$\frac{1}{(w^n)'}=\frac{1}{n}\frac{\sqrt[n]{z}}{z}。$$

因此，$\sqrt[n]{z}$ 的这个**单值连续分支**在区域 $\mathscr{D}$ 上是解析的。并且所构成的 n 个分支中的每一个单值连续分支，都是区域 $\mathscr{D}$ 上的解析函数。

由上述讨论过程可知，实际上，在每一个不包含任何一条围绕着原点 $z=0$ 的闭曲线的区域 $\mathscr{D}$ 内，由(1-105)式可分出 n 个**单值连续**函数来，且每一个函数在区域 $\mathscr{D}$ 内都是解析的；在每一个固定的点上，它们的值彼此仅相差一个倍数 $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$。

如前所述，对数函数 $\operatorname{Log} z(z\neq 0)$ 由下式所定义：

$$\operatorname{Log} z=\log|z|+i(\arg z+2k\pi) \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots),$$

可见它是一个有可列无限多个值的函数。主值 $\arg z$ 通常取成满足 $-\pi<\arg z\leqslant\pi$。令区域 $\mathscr{D}=\mathscr{C}-\{z: z\leqslant 0\}$，在区域 $\mathscr{D}$ 内，对每一个给定的整数 k，(1-55)式的右端表示一个单叶的单值连续函数，它是 $e^w=z$ 的反函数，由反函数的求导公式，它的导数等于 $1/(e^w)'=\frac{1}{z}$。这样，在所给的区域 $\mathscr{D}$ 上，$\mathrm{Log}\, z$ 被分成可列无限多个单值的解析函数分支，在每一个固定的点处，这些分支的值只彼此相差一个差数 $2k\pi i$。实际上，在任何一个不含有包围着原点 $z=0$ 的闭曲线的区域 $\mathscr{D}$ 内，(1-55)式的右端恰把多值函数 $\mathrm{Log}\, z$ 分成可列无限多个单值的解析函数分支。可见，将多值函数分成若干个单值连续分支的方式并不是唯一的。

我们注意到，对上述两个多值函数，只要 z 沿着以原点为中心的圆周 $|z|=r$ 转圈时，不论 r 多小（即在 $z=0$ 的邻域内），也不论 r 多大（即在 $z=\infty$ 的邻域内），就会产生多值性。由于这个原因，原点 $z=0$ 和无穷远点 $z=\infty$ 被称为函数 $w=\sqrt[n]{z}$ 和 $w=\mathrm{Log}\, z$ 的**支点**。因此，只要把复平面 $\mathscr{C}$ 沿任一条从原点出发到无穷远点的简单若当弧线 r 割开，就能把上述两个函数分成单值的连续函数分支。类似地，对函数 $w=\sqrt[n]{z-a}$ 和 $w=\mathrm{Log}(z-a)$ 来说，只要将复平面 $\mathscr{C}$ 沿任何一条从 $z=a$ 到 $z=\infty$ 的若当弧线割开，在由此所得到的单连区域 $\mathscr{D}$ 上，就能把这两个函数分成单值连续函数分支，因为 $z=a$ 和 $z=\infty$ 是它们的支点。

对函数 $w=\sqrt{\{(z-a)(z-b)\}}$，由于 $z=a$ 和 $z=b$ 是它的支点，因此，只要把复平面 $\mathscr{C}$ 沿连接 $z=a$ 和 $z=b$ 直线段割开（图 1.7），或者沿着分别从 $z=a$ 到 $z=\infty$ 和从 $z=b$ 到 $z=\infty$ 的两条不相交的若当弧线割开（图 1.8），则在所得的区域 $\mathscr{D}$ 上，就能把这函数分成单值连续函数分支。注意，在这种情况下，无穷远点不是支点。

对函数 $w=\sqrt{\{(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_k)\}}$，若 k 是偶数，我们作割线段，把每对点 a_r, a_s 用直线段相连接；若 k 是奇数，我们作割线时，必须把其中的一个点，比如 a_1 与 ∞ 点相连接，对其余的点，成对地用直线段相连接。那么在这样所得到的区域 $\mathscr{D}$ 上就能把这个多

值函数分成单值连续函数分支。

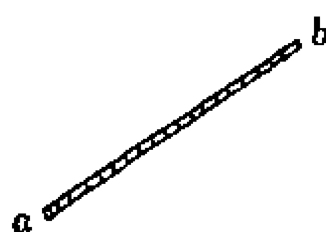


图 1.7

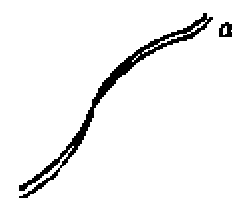


图 1.8

习　题

1. 将下列各式表示成 $a+ib$ 的形式，其中 a 和 b 是实数：

(1) e^{2+i}；　(2) e^{2-i}；　(3) e^{-2-i}；

(4) $e^{-2}e^{-i}$；　(5) $\mathrm{Re}(e^{-2}e^{-i})$；　(6) $\mathrm{Im}(e^{-2}e^{-i})$；

(7) $e^{(1+i)^2}$；　(8) $e^{1/(1+i)}$。

2. 将下列各式表示成 $u(x,y)+iv(x,y)$ 的形式，其中 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 是变量 x 和 y 的实函数：

(1) e^{z^2}；　(2) e^{iz}；　(3) $e^{1/z}$；

(4) $1/e^z$；　(5) e^{e^z}。

3. 一般说，下列诸式中哪些是正确的？

(1) $e^{|z|}=|e^z|$；　(2) $e^{\bar{z}}=\overline{(e^z)}$；　(3) $e^{1/z}=1/e^z$；

(4) $\mathrm{Re}\,e^z=e^{\mathrm{Re}\,z}$；　(5) $(e^z)^m=e^{mz}$，m 是任何整数；

(6) $e^{\bar{z}}+e^{z}=2\mathrm{Re}(e^z)$。

4. 在区域 $|z-2i|\leqslant 1$ 内，$|e^z|$ 的最大值和最小值是什么？

5. 求下列函数的解析性区域（若它是解析的），并求出其在解析性区域内关于 z 的导数：

(1) e^{2z}；　(2) e^{z^2}；　(3) $e^{|z|}$；

(4) $e^{\bar{z}}$；　(5) $e^{1/z}$。

6. 设流体流动由复势 $\Phi(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)=e^z$ 所描写。

(1) 求速度势 $\varphi(x,y)$ 和流函数 $\psi(x,y)$ 的明确的表示式；

(2) 在条形区域$|\text{Im}z|\leqslant\pi/2$内描绘出$\varphi=0,+1/2,+1,+2$的等势线和$\psi=0,\pm1/2,\pm1,\pm2$的流线；

(3) 在点$(1,\pi/4)$流体的速度矢是什么？

7. 用数值表或袖珍计算器将下列各式表示成$a+\mathrm{i}b$的形式，其中a和b是实数：

(1) $\cos(3-2\mathrm{i})$；　　(2) $\cos(3+2\mathrm{i})$；

(3) $\sin(3-2\mathrm{i})$；　　(4) $\sin(3+2\mathrm{i})$；

(5) $\mathrm{tg}(3-2\mathrm{i})$；　　(6) $\cos(e^{\mathrm{i}})$；

(7) $e^{\cos(\mathrm{i})}$；　　(8) $e^{\sin(\mathrm{i}m)}, m=0,\pm1,\pm2,\cdots$；

(9) $\sin(\cos \mathrm{i})$；　　(10) $\cos(\sin \mathrm{i})$；

(11) $\mathrm{tg}(\mathrm{tg}\,2\mathrm{i})$。

8. 函数$\sin z,\cos z$和$\mathrm{tg}\,z$都满足函数方程$f(\bar{z})=\overline{f(z)}$吗？

9. 证明：$e^{\mathrm{i}z}=\cos z+\mathrm{i}\sin z$对任何复数成立。这是欧拉公式的拓广。

10. $\mathrm{tg}\,z$在z-平面的什么地方是不解析的？

11. 证明：方程$\sin z=0$在z-复平面上仅有解$z=n\pi, n=0,\pm1,\pm2,\cdots$。于是，$\cos z,\sin z$只在实轴上有零点。

12. 若$f(z)=\sin(e^{z}), f(z)$在z-平面上何处是解析的？求出$f'(z)$。

13. (1)证明：$|\cos z|=\sqrt{\mathrm{sh}^2 y+\cos^2 x}$（提示：$\mathrm{ch}^2\theta-\mathrm{sh}^2\theta=1$。）

(2)证明：$|\sin z|=\sqrt{\mathrm{sh}^2 y+\sin^2 x}$；

(3)证明：$|\sin z|^2+|\cos z|^2=\mathrm{sh}^2 y+\mathrm{ch}^2 y$。

14. (1)函数$\sec z$和$\csc z$在z-平面上何处是解析的？

(2)求出$d(e^{\csc z})/dz$及其在点$z=\mathrm{i}$的值；

(3)求出$d(\sin(\sec z))/dz$及其在点$z=-\mathrm{i}$的值。

15. 证明：

$$\mathrm{tg}\,z=\frac{\sin(2x)+\mathrm{i}\,\mathrm{sh}(2y)}{\cos(2x)+\mathrm{ch}(2y)}.$$

16. 将下列各式表示成$a+\mathrm{i}b$的形式，其中a和b是实数：

(1) $\mathrm{sh}(2+\mathrm{i})$；　　(2) $\mathrm{ch}(-1-\mathrm{i})$；　　(3) $\mathrm{th}(2+\mathrm{i})$。

17. (1)证明：$\mathrm{sh}\,z=\mathrm{sh}\,x\cos y+\mathrm{i}\,\mathrm{ch}\,x\sin y$及$\mathrm{sh}\,z=0$当且仅当$z=\mathrm{i}n\pi$成立，其中$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$；

(2)证明：$\mathrm{ch}\,z=\mathrm{ch}\,x\cos y+\mathrm{i}\,\mathrm{sh}x\sin y$及$\mathrm{ch}\,z=0$当且仅当$z=\pm(2n+1)\pi\mathrm{i}/2$成立，其中$n=0,1,2,3,\cdots$；

(3)$\mathrm{th}\,z$在z-平面上何处是解析的？

18. 证明：

(1) $|\mathrm{sh}\, z|^2=\mathrm{sh}^2 x+\sin^2 y$;　　(2) $|\mathrm{ch}\, z|^2=\mathrm{sh}^2 x+\cos^2 y$。

19．(1) $f(z)=\mathrm{sh}(\sin(z^2))$在 z-平面上何处是解析的?

(2)求 $f'(z)$及其 $f'(\mathrm{i})$的数值。

20．利用洛必达(L'Hopital)法则求下列各函数当 z 趋于 0 的极限值：

(1) $\sin(z)/z$;　(2) $\mathrm{sh}(z)/z$;　(3) $(1-\mathrm{ch}(z))/z$。

21．求下列各式的数值：

(1) $\sin(\mathrm{Log}(\mathrm{i}))$的一切值；　(2) $\mathrm{sh}(\mathrm{Log}(-\mathrm{i}))$的一切值；

(3) $\log(\log \mathrm{i})$;　(4) $\log(\log(\log(-\mathrm{i})))$。

22．一般说，下列各方程正确吗?

(1) $\log\bar{z}=(\overline{\log z})$;　(2) $\log z=\overline{(\log\bar{z})}$。

23．利用对数求解 z 的一切解：

(1) $e^z=\mathrm{i}$;　(2) $e^z=\mathrm{i}e^2$;　(3) $e^{e^z}=\mathrm{i}$。

24．(1)证明：$(1/3)\mathrm{Log}(8\mathrm{i})=\log 2+\mathrm{i}(\pi/6+(2/3)k\pi)$，其中 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$;

(2)证明：$\mathrm{Log}(8\mathrm{i})^{1/3}=\log 2+\mathrm{i}(\pi/6+(2/3)m\pi+2n\pi)$，其中 m，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$;

(3) 证明：$\mathrm{Log}(8\mathrm{i})^{1/3}$ 的一切可能的值所成的集合与 $(1/3)\mathrm{Log}(8\mathrm{i})$的一切可能的值所成的集合是相同的。

25．设 $f(z)=\log z=\log r+\mathrm{i}\theta, 0\leqslant\theta<2\pi$。

(1) 找出这个函数的最大解析性区域；

(2) 求 $f(-e^2)$的数值；

(3) 解释我们为什么不能在解析性区域内确定 $f(e^2)$。

26．(1)为什么$(\log z)/(z+1)$的最大解析性区域与 $\log z$ 的最大解析性区域是一样的? 注意 $\log z$ 是 $\mathrm{Log}\, z$ 的主值支。

(2)求出$(\log z)/(z-1)$的最大解析性区域；

(3)说明为什么$(\log z)/(z^2-1)$在由 z-平面除去负实轴、原点和 $z=1$ 所构成的区域内是解析的。

27．复电静力学势 $\Phi(x,y)=\varphi+\mathrm{i}\psi=\log(1/z)$，其中 $z\neq0$，能由位于 $z=0$ 且垂直于 xy-平面的带电的电线所产生。

(1) 描绘出这势的流线；

(2) 描绘出 $\varphi=-1,0,1$,和 2 的等势线；

(3) 求在任何点(x,y)的电场的分量。

第二章　柯西积分公式

§1　柯西定理与柯西积分公式

1.1　复变函数的积分

根据柯西理论，复变函数，特别是解析函数的理论与复积分法紧密相联，并且为了证明解析函数具有二阶导数，我们必须首先将它表示成围道上的积分。因此，我们必须考虑一个复变函数沿一条平面曲线积分的定义。

设 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$，则 $z(t)=\varphi(t)+i\psi(t)$ 确定复平面上的一条曲线弧。我们用点列 $\alpha=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_k<\cdots<t_n=\beta$ 把区间 (α,β) 细分，将曲线上对应于这些 t 值的点分别记为 $P_0,P_1,\cdots,P_k,\cdots P_n$。则有向折线 $P_0P_1P_2\cdots P_n$ 的长度是 $\sum\limits_{k=1}^{n}[(x_k-x_{k-1})^2+(y_k-y_{k-1})^2]^{1/2}$，它依赖于 (α,β) 的细分的方式。我们称这个和数为**内接折线的长度**。如果当相联两分点间的最大距离，即 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(t_k-t_{k-1})\to 0$ 时，这和数有一个确定的极限值 λ，则称此曲线弧是可求长的，并称 λ 为其长度。

容易证明：曲线弧可求长的充要条件是函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 在 (α,β) 内应是有界变差函数。若 $\varphi'(t)$ 和 $\psi'(t)$ 是连续的，则能证明：由 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 所定义的曲线是可求长的，并且它的长度由下式给出：

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\{\varphi'(t)\}^2+\{\psi'(t)\}^2]}\,dt。$$

若我们考虑一条若当弧，其方程是 $z=\varphi(t)+i\,\psi(t)$，$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$，如果 $\varphi'(t),\psi'(t)$ 在 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 内是连续的，则称它为**一条光滑的若当弧**。并且，这光滑若当弧的长度是

$$\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\{\varphi'(t)\}^2+\{\psi'(t)\}^2]}\,dt。$$

我们称由有限多条光滑若当弧所组成的连续的若当曲线为一围道。

我们现在定义复变函数沿一光滑弧 L 的积分。设光滑若当弧 L 是由方程：$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 所确定，其端点为 A 和 B。设函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 是任何一个复变函数，它在 L 上是连续的。令 $z_0,z_1,\cdots,z_n$ 是 L 上的点，$z_0=A$，$z_n=B$，考虑和式

$$\sum_{r=1}^{n}\{f(\zeta_r)(z_r-z_{r-1})\},\tag{2-1}$$

其中 ζ_r 是弧 z_{r-1}，z_r 内任何一点。若 $\zeta_r=\xi_r+i\eta_r$，我们记 $u_r=u(\xi_r,\eta_r)$，$v_r=v(\xi_r,\eta_r)$，则(2-1)式能写成

$$\sum_{r=1}^{n}\{(u_r+iv_r)(x_r+iy_r-x_{r-1}-iy_{r-1})\}。$$

但是，根据中值定理，有

$$x_r-x_{r-1}=\varphi(t_r)-\varphi(t_{r-1})=(t_r-t_{r-1})\varphi'(\tau_r),$$

$$y_r-y_{r-1}=\psi(t_r)-\psi(t_{r-1})=(t_r-t_{r-1})\psi'(\tau'_r),$$

其中 $t_{r-1}\leqslant\tau_r\leqslant t_r$，$t_{r-1}\leqslant\tau'_r\leqslant t_r$。因此上述和式能写成

$$\sum_{r=1}^{n}[(u_r+iv_r)\{\varphi'(\tau_r)+i\psi'(\tau'_r)\}(t_r-t_{r-1})]。\tag{2-2}$$

由于所讨论的一切函数是连续的，因而是一致连续的，于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，我们能找到 $\delta(\varepsilon)$，使得对每一个 r，成立

$$|u_r\varphi'(\tau_r)-u(x_r,y_r)\varphi'(t_r)|<\varepsilon,$$

只要 $|t_r-t_{r-1}|<\delta$，还有

$$\sum_{r=1}^{n}\{\varepsilon(t_r-t_{r-1})\}=\varepsilon(t_n-t_0)。$$

于是，当 ε 和 δ 趋于零时，

$$\sum_{r=1}^{n}\{u_r\varphi'(\tau_r)(t_r-t_{r-1})\}\ 与\ \sum_{r=1}^{n}\{u(x_r,y_r)\varphi'(t_r)(t_r-t_{r-1})\}$$

趋于同一个极限值

$$\int_{\alpha}^{\beta}u\{\varphi(t),\psi(t)\}\varphi'(t)\,dt。$$

类似地，(2-2)式中的其它各项都趋于各自的极限，因此整个和式趋

于极限

$$\int_{\alpha}^{\beta}[(u+\mathrm{i}v)\{\varphi'(t)+\mathrm{i}\psi'(t)\}]\mathrm{d}t$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}(u+\mathrm{i}v)(\mathrm{d}x+\mathrm{i}\mathrm{d}y)$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}u(x,y)\mathrm{d}x-\int_{\alpha}^{\beta}v(x,y)\mathrm{d}y+\mathrm{i}\int_{\alpha}^{\beta}v(x,y)\mathrm{d}x+\mathrm{i}\int_{\alpha}^{\beta}u(x,y)\mathrm{d}y。\tag{2-3}$$

这极限(2-3)被取成 $f(z)$ 沿光滑弧 L 的复积分，记作

$$\int_{L}f(z)\mathrm{d}z。$$

设围道 C 由有限多条光滑弧 L_ν 所组成，$f(z)$ 沿围道 C 的积分由下式给出

$$\int_{C}f(z)\mathrm{d}z=\sum_{\nu}\int_{L_\nu}f(z)\mathrm{d}z。\tag{2-4}$$

由公式(2-3)和(2-4)，易知

$$\int_{C}\{af(z)+bg(z)\}\mathrm{d}z=a\int_{C}f(z)\mathrm{d}z+b\int_{C}g(z)\mathrm{d}z,\tag{2-5}$$

$$\int_{C}f(z)\mathrm{d}z=-\int_{C^-}f(z)\mathrm{d}z,\tag{2-6}$$

其中，a 与 b 是两个复常数，C^- 表示一条同 C 相重合，但却循着相反的方向通过的曲线。

定理 1 若函数 $f(z)$ 在长度为 l 的围道 C 上是连续的，它在 C 满足不等式 $|f(z)|\leqslant M$，则

$$\left|\int_{C}f(z)\mathrm{d}z\right|\leqslant Ml。\tag{2-7}$$

这只要对光滑弧 L 证明定理就足够了。由于任何实变函数的积分的模不可能超过那个函数模的积分，我们有

$$\left|\int_{L}f(z)\mathrm{d}z\right|=\left|\int_{\alpha}^{\beta}(u+\mathrm{i}v)\{\varphi'(t)+\mathrm{i}\psi'(t)\}\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant\int_{\alpha}^{\beta}M|\varphi'(t)+\mathrm{i}\psi'(t)|\mathrm{d}t$$

$$=Ml。$$

若 C 是一条闭围道，我们约定闭曲线的反时针方向为此闭曲线的正方向。

例 2-1 (1) 计算 $\int_{0+i}^{1+2i}(\bar{z})^2dz$ 沿曲线 $y=x^2+1$（见图 2.1(a)）的值。

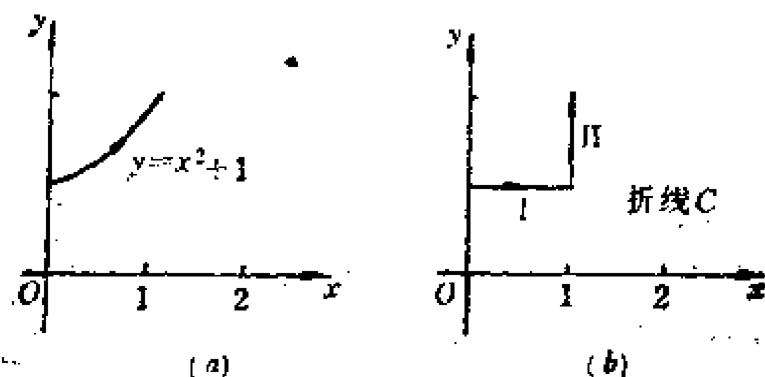


图 2.1

(2) 计算上述积分沿折线 C：$y=1$，$0\leqslant x\leqslant 1$；$x=1$，$1\leqslant y\leqslant 2$（图 2.1(b)）的值。

解 (1) 为了应用公式 (2-3)，令 $f(z)=(\bar{z})^2=(x-iy)^2=x^2-y^2-2ixy$，于是，$u=x^2-y^2$，$v=-2xy$，我们有

$$\int_{0+i}^{1+2i}(\bar{z})^2dz=\int_{(0,1)}^{(1,2)}(x^2-y^2)dx+\int_{(0,1)}^{(1,2)}2xydy$$

$$+i\int_{(0,1)}^{(1,2)}(-2xy)dx+i\int_{(0,1)}^{(1,2)}(x^2-y^2)dy。$$

将 $y=x^2+1$ 代入右端的第一个积分和第三个积分，则它们分别等于 $-\int_0^1(x^4+x^2+1)dx=-23/15$，$-\int_0^1 2(x^3+x)dx=-3/2$。将 $x=\sqrt{y-1}$ 代入右端的第二和第四个积分，则它们分别等于

$$\int_1^2 2y\sqrt{y-1}dy=32/15, \qquad \int_1^2(-y^2+y-1)dy=-11/6。$$

于是，我们得到

$$\int_{0+i}^{1+2i}(\bar{z})^2dz=\frac{3}{5}-i\frac{10}{3}。$$

(2) 沿线段 I：$y=1, 0\leqslant x\leqslant 1$，$f(z)=(\bar{z})^2=(x-i)^2=x^2-1-$

$2x\mathrm{i}=u+\mathrm{i}v$，于是 $u=x^2-1$，$v=-2x$。由于 $y=1$，$\mathrm{d}y=0$，由公式(2-3)，我们有

$$\int_{I} f(z)\,\mathrm{d}z=\int_0^1 (x^2-1)\mathrm{d}x+\mathrm{i}\int_0^1(-2x)\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{2}{3}-\mathrm{i}。$$

沿线段Ⅱ：$x=1, 1\leqslant y\leqslant 2, f(z)=\overline{(1+\mathrm{i}y)}^2=1-y^2-2\mathrm{i}y=u+\mathrm{i}v$，于是，$u=1-y^2$，$v=-2y$。由于 $x=1$，$\mathrm{d}x$，由公式(2-3)，我们有

$$\int_{II} f(z)\mathrm{d}z=\int_1^2(2y)\mathrm{d}y+\mathrm{i}\int_1^2(1-y^2)\mathrm{d}y$$
$$=3-\frac{4}{3}\mathrm{i}。$$

于是，由公式(2-4)，我们遂得

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=\int_I f(z)\,\mathrm{d}z+\int_{II} f(z)\mathrm{d}z$$
$$=-\frac{2}{3}-\mathrm{i}+3-\frac{4}{3}\mathrm{i}$$
$$=\frac{7}{3}-\frac{7}{3}\mathrm{i}。$$

1.2 柯西定理

柯西定理的初等证明依赖于二维的格林(Green)定理，它要求 $f'(z)$ 连续性的假设。我们首先给出有此假设的证明，但是，考虑到柯西定理在复变函数理论中的基本的重要性，我们也将给出没有这种假设限制的证明。

我们先给出柯西定理的一个初等证明。

若在闭围道 C 的内部及其上，$f(z)$ 是一个解析函数，并且 $f'(z)$ 是连续的，则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0。\tag{2-8}$$

设 $\overline{\mathscr{D}}$ 是由 C 的内部及其上的一切点所组成的闭区域，于是，由(2-3)式，我们能将积分(2-1)写成

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=\oint_C(u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y)+\mathrm{i}\oint_C(v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y)。\tag{2-9}$$

根据格林定理：若$P(x,y)$，$Q(x,y)$，$\partial Q/\partial x$，$\partial P/\partial y$在D内都是连续的函数，则

$$\oint_C(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y)=\iint_{\mathscr{D}}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

由于$f'(z)=u_x+\mathrm{i}v_x=v_y-\mathrm{i}u_y$，根据假设，$f'(z)$在$\mathscr{D}$内是连续的，因而(2-9)式右端中的两个积分号下的函数满足格林定理的条件，因此，根据柯西-黎曼方程，我们有

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=-\iint_{\mathscr{D}}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\mathrm{i}\iint_{\mathscr{D}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=0。$$

哥尔沙(Goursat)首先证明关于$f'(z)$的连续性假设是不必要的，并且只要假定$f'(z)$在C内及其上的一切点存在，那么柯西定理成立。事实上，$f'(z)$的连续性实际上是它的可微性，是柯西定理的结果。

现在我们再给出柯西定理的第二个证明。

定理2 若$f(z)$在闭围道C内及其上的一切点是解析的，则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0。$$

证明 由于解析函数$f(z)$是连续的，而连续函数是可积分的，所以定理2中的积分是确实存在的。我们还注意到，如果我们用平行于x轴和y轴的直线构造一个正方形网，以围道C为其外边界，则C所围成的闭区域被分成或是正方形或是正方形的一部分为网眼所组成的网络，使得

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=\sum\oint_\gamma f(z)\mathrm{d}z,\tag{2-10}$$

其中γ表示网眼的与C同方向的边界。

若z_0位于边长为a的正方形围道S的内部，则

$$\left|\oint_S|z-z_0||\mathrm{d}z|\right|<4\sqrt{2}\,a^2=4\sqrt{2}\cdot(S\text{的面积}),$$

这是由定理1立即可得的，因为$|z-z_0|<a\sqrt{2}$以及围道S的长度是$4a$。由此我们得到下述引理。

引理 1 若C是一闭围道，则$\oint_C dz=0$，$\oint_C zdz=0$。

这些结果可由积分的定义直接得到，因为当$\max|z_r-z_{r-1}|\to 0$时，$\int_C dz=\lim\sum_{r=1}^{n}\{(z_r-z_{r-1})\cdot 1\}=0$。

还有

$$
\begin{aligned}
\int_C zdz &= \lim\sum_{r=1}^{n}\{z_r(z_r-z_{r-1})\} \\
&= \lim\sum_{r=1}^{n}\{z_{r-1}(z_r-z_{r-1})\} \\
&= \frac{1}{2}\lim\sum_{r=1}^{n}\{(z_r+z_{r-1})(z_r-z_{r-1})\} \\
&= \frac{1}{2}\lim\sum_{r=1}^{n}\{z_r^2-z_{r-1}^2\} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

引理 2（哥尔沙引理） 给定$\varepsilon>0$，利用适当的平行于x轴和y轴的平行线族，则我们能把C的内部分成有限多个网眼，它们或是正方形或是正方形的一部分，并且在每一个网眼内，存在一点z_0，使得对网眼中的一切z，有

$$f(z)-f(z_0)=f'(z_0)(z-z_0)+\varepsilon_r|z-z_0|, \tag{2-11}$$

其中$|\varepsilon_r|<\varepsilon$。

证明 假定引理的结论不真，则不论将C的内部怎样细分，至少存在一个网眼，(2-11)式对它是不成立的。我们将说明，这必定导致在C的内部或在C上存在一点，$f(z)$在这一点是不可微的。

用一个面积为A的大正方形Γ把C包围在其内部，并且对它反复进行四等分。当Γ被分成四等分后，在Γ的四个正方形中至少存在一个正方形，比如Γ_1，(2-11)式对它是不成立的。把Γ_1四等分，在Γ_1的四个正方形中至少存在一个，比如Γ_2，(2-11)式对它不成立。如此继续下去，于是我们得到一个正方形序列$\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_n, \cdots$，每一个正方形都包含在其前面的一个正方形中，对它们来说，引理是不成的。由于正方形Γ_n的面积是$A/4^n$，这一正方形序列必收缩

成一个点ζ，它位于一切正方形$\Gamma_n(n=1,2,\cdots)$之中，显然，ζ位于C内或C上，在$z_0=\zeta$这一点，(2-11)式不成立。

但是，另一方面，由于$f(z)$在ζ这一点是可微的，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得当$|z-\zeta|<\delta$时，有

$$f(z)-f(\zeta)=f'(\zeta)(z-\zeta)+\varepsilon_\zeta\cdot|z-\zeta|,$$

其中当$|z-\zeta|<\delta$时$|\varepsilon_\zeta|<\varepsilon$。由于$\Gamma_n$收缩成点$\zeta$，则存在自然数$N$，使得对一切$n>N$，$\Gamma_n$都位于圆域$|z-\zeta|<\delta$之中，这表明，在$z_0$取成$\zeta$时，(2-11)式是满足的，这是矛盾的。故哥尔沙引理是成立的。

我们继续进行定理2的证明。根据引理1和引理2，(2-10)式右端中的每一项为

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=\oint_\gamma \varepsilon_\gamma|z-z_0|\mathrm{d}z,$$

因而

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=\sum\oint_\gamma \varepsilon_\gamma|z-z_0|\mathrm{d}z,$$

$$\left|\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z\right|\leqslant\sum\left|\oint_\gamma \varepsilon^\gamma|z-z_0||\mathrm{d}z|\right|.$$

若γ不是一个完全的正方形，把它分成两部分，γ_1由那些直线段组成，γ_2由C的一部分所组成。由于$|\varepsilon_\gamma|<\varepsilon$，则

$$\sum\left|\oint_{\gamma_1}\varepsilon_\gamma|z-z_0|\,|\mathrm{d}z|\right|<\varepsilon\cdot4\sqrt{2}A,$$

其中A是包围C的那个大正方形Γ的面积。同样，由于那些γ_2的长度之和不可能超过可求长曲线C的长度l，所以

$$\sum\left|\oint_{\gamma_2}\varepsilon_\gamma|z-z_0||\mathrm{d}z|\right|<Kl\varepsilon,$$

其中K是大正方形Γ的对角线的长度，因$|z-z_0|\leqslant K$，于是我们导出

$$\left|\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z\right|<B\varepsilon,$$

其中B是一个常数。由于ε是任意的，故定理成立。

柯西定理有下述重要推广。

定理3 设区域$\mathscr{D}$的边界C是一条可求长的若当闭曲线，若函数$f(z)$在$\mathscr{D}$内解析，在$\overline{\mathscr{D}}$上连续，则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0。$$

柯西定理能使我们在计算某类积分时减少很多的劳动。例如，当C是任一若当闭围道时，$\oint_C \sin z\mathrm{d}z$，$\oint_C e^z\mathrm{d}z$ 和$\oint_C \mathrm{ch}z\,\mathrm{d}z$ 等这类积分必定是零，因为每一被积函数都是整函数。

这里不予证明，读者可参看庄圻泰等著的《复变函数》。

定理 4 设区域$\mathscr{D}$的边界C是由$\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_n$这些可求长的若当闭曲线所组成，$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$都在$\gamma_0$的内部。若函数$f(z)$在$\mathscr{D}$内解析，在$\overline{\mathscr{D}}$上连续，则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0,$$

其中积分是沿C的正向取的，或者

$$\oint_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z=\oint_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z+\oint_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z+\cdots+\oint_{\gamma_n} f(z)\mathrm{d}z。$$

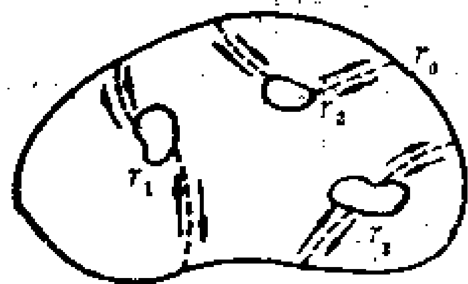


图 2.2

证明 我们用一些辅助曲线把区域$\mathscr{D}$分成$n+1$个由可求长的若当闭曲线所围成的区域（图 2.2）。设I_k是$f(z)$沿第k个区域的边界的积分（沿正向取的），根据定理 3，$I_k=0$ $(k=1,2,\cdots,n+1)$，所以，$\sum_{k=1}^{n+1} I_k=0$。但因为$f(z)$沿辅助曲线的积分来回取两次，故

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=\sum_{k=1}^{n+1} I_k=0。$$ 定理证毕。

特别当$f(z)$在由若当闭曲线C_1和C_2所围成的二连通区域$\mathscr{D}$内及其上解析时，我们有

$$\oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z=\oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z。$$

1.8 柯西积分公式和解析函数的导数

借助柯西积分公式，我们能把解析函数$f(z)$在闭围道C内任何

一点的值表示成沿 C 的围道积分。

定理 5 若函数 $f(z)$ 在闭围道 C 的内部及其上是解析的，又若 ζ 是 C 内部的点，则

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)dz}{z-\zeta}=f(\zeta)。\tag{2-12}$$

这公式称为**柯西积分公式**（简称**柯西公式**）。

证明 如图 2.3 所示，环绕 $z=\zeta$，以 δ 为半径作一个小圆，使它完全位于 C 的内部。在 C 和 γ 之间的区域内，函数 $\varphi(z)=f(z)/(z-\zeta)$ 是解析的，在 C 内作一折线 L，连接 γ 上的一点和 C 上的一点，我们形成一条闭围道 Γ，$\varphi(z)$ 在 Γ 的内部及其上是解析的，于是根据柯西定理，有

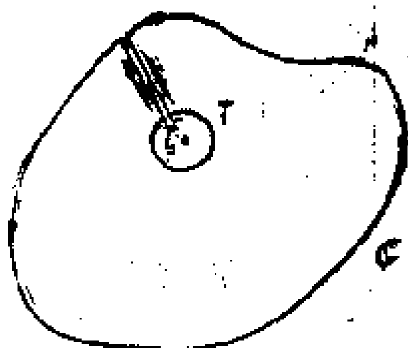


图 2.3

$$\oint_\Gamma \varphi(z)dz=0,$$

其中 Γ 的方向是正的（即关于所述区域是反时针方向），由于要在 L 上来回积分两次，因此即得

$$\oint_C \varphi(z)dz-\oint_\gamma \varphi(z)dz=0。$$

但是

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \varphi(z)dz&=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)dz}{z-\zeta}\\&=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(\zeta)dz}{z-\zeta}+\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}dz。\end{aligned}\tag{2-13}$$

在 γ 上，$z-\zeta=\delta e^{i\theta}$，于是上式右端中的第一项成为

$$\frac{f(\zeta)}{2\pi i}\oint_0^{2\pi}\frac{\delta i e^{i\theta}d\theta}{\delta e^{i\theta}}=f(\zeta),$$

根据定理 1，(2-13)式中右端的第二项的模不能超过

$$\frac{1}{2\pi\delta}\max_{|z-\zeta|=\delta}|f(z)-f(\zeta)|\cdot 2\pi\delta。$$

由于 $f(z)$ 在 $z=\zeta$ 是连续的，当 $\delta\to 0$ 时这式子趋于零，这就证明了定理。

例 2-2 求 $\oint_C[(\cos z)/(z-1)]dz$ 和 $\oint_C[(\cos z)/(z+1)]dz$，其中 C 是顶点为 $(0,0)$，$(2,-2)$ 和 $(2,2)$ 的三角形的边界。（见图 2.4）。

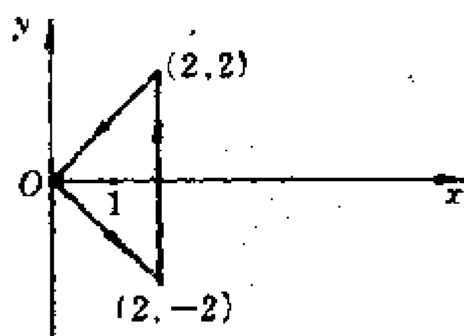


图 2.4

解 (1) 由于 $\cos z$ 是整函数，又点 $z=1$ 位于 C 的内部，因此，我们能用柯西积分公式(2-12)。于是

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{\cos z}{z-1}dz=\cos 1,$$

或者

$$\oint_C\frac{\cos z}{z-1}dz=2\pi i\cos 1\doteq 3.39i。$$

(2) 被积函数能写成 $(\cos z)/(z-(-1))$，点 $z_0=-1$ 位于 C 的外部，此时柯西积分公式不能用。但是，由于被积函数在 C 内及其上是解析的，因此，据柯西定理(2-8)式，其值是零。

例 2-3 求 $(1/2\pi i)\oint_C[(\cos z)/(z^2+1)]dz$，其中 C 是圆周 $|z-2i|=2$。

解 在这里不能直接看出来能否应用柯西积分公式或柯西定理。将分母因子分解，我们有

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{\cos z}{(z+i)(z-i)}dz。$$

注意到 $z=i$ 在 C 的内部，而函数 $f(z)=(\cos z)/(z+i)$ 在 C 的内部及其上是解析的，因此，据柯西积分公式(2-12)，所给的积分值是

$$f(i)=\frac{\cos i}{2i}=\frac{-i}{2}\text{ch }1。$$

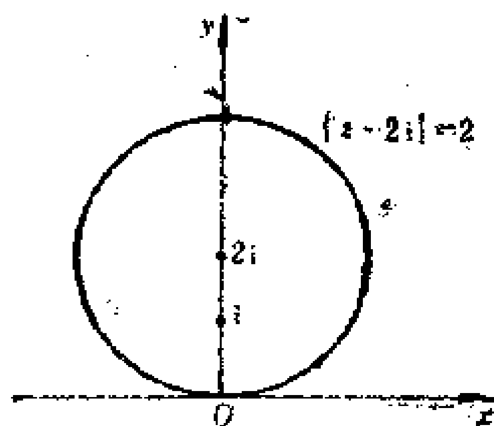


图 2.5

故

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\cos z}{z^2+1}dz = -\frac{i}{2}\text{ch}1。$$

下述定理说明如何用围道积分去表示$f'(\zeta)$的值。

定理6 若$f(z)$在区域$\mathscr{D}$内是解析的，则它的导数由下式给出：

$$f'(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)dz}{(z-\zeta)^2}, \tag{2-14}$$

其中C是位于$\mathscr{D}$内包围点$z=\zeta$的任一简单闭围道。

证明 根据定理5，我们有

$$\frac{f(\zeta+h)-f(\zeta)}{h}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{1}{h}\left(\frac{1}{z-\zeta-h}-\frac{1}{z-\zeta}\right)f(z)dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\left\{\frac{f(z)}{(z-\zeta)^2}+\frac{hf(z)}{(z-\zeta)^2(z-\zeta-h)}\right\}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)dz}{(z-\zeta)^2}+I。$$

我们只要证明当$|h|\to 0$时$|I|\to 0$就够了。由于$f(z)$在C内和C上是解析的，因而它是有界的，因此在C上$|f(z)|\leqslant M$。令d是从ζ到C的距离，若令$|h|$选得充分小使得$|h|<\frac{1}{2}d$，则

$$|I|<\frac{|h|}{2\pi}\cdot\frac{Ml}{d^2\cdot\frac{1}{2}d},$$

其中l是C的长度。显然，上式右端项当$|h|\to 0$时趋于零。故定理成立。

由证明中可以看出，还可以把这个定理表述成下述的形式：如果函数$f(z)$在区域$\mathscr{D}$的边界C上是连续的，那么用柯西公式表达的函数

$$f(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)dz}{z-\zeta} \tag{2-15}$$

在区域$\mathscr{D}$是解析的。

(2-14)式表明，将柯西公式(2-12)式从形式上对ζ微分，这样也可得到导数的公式(2-14)；定理6说明这样的微分过程是合理的。

定理7 若函数$f(z)$在区域$\mathscr{D}$内是解析的，则在$\mathscr{D}$的每一个点ζ，

$f(z)$有一切阶的导数，其值由下式给出

$$f^{(n)}(\zeta)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)dz}{(z-\zeta)^{n+1}},\quad n=1,2,3,\cdots。\tag{2-16}$$

证明 若我们假定定理对 $n=m$ 成立，我们考虑式子

$$\frac{f^{(m)}(\zeta+h)-f^{(m)}(\zeta)}{h},$$

我们能容易地证明它等于

$$\frac{(m+1)!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)dz}{(z-\zeta)^{m+1}}+I,$$

如在定理 6 中所证明的，立即可得当 $|h|\to 0$ 时 $|I|$ 趋于零。证明的细节留给读者去完成。

例 2-4 求 $\oint_C[(z^3+2z+1)/(z-1)^3]dz$ 的值，其中 C 是圆周 $|z|=2$。

解 考虑到被积函数中分母的形式，我们将用方程 (2-16)，取 $n=2$，于是我们有

$$f^{(2)}(z_0)=\frac{2!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^3}dz.$$

取 $z_0=1$，由上方程，则得

$$\frac{2\pi i}{2}f^{(2)}(1)=\oint_C\frac{f(z)}{(z-1)^3}dz。$$

取 $f(z)=z^3+2z+1$，由这公式便得到

$$\oint_C\frac{z^3+2z+1}{(z-1)^3}dz=\pi i\frac{d^2}{dz^2}(z^3+2z+1)_{z=1}$$

$$=\pi i(6z)_{z=1}=6\pi i。$$

例 2-5 求 $\oint_C[\cos z/((z-1)^3(z-5)^2)]dz$，其中 C 是圆周 $|z-4|=2$。

解 让我们检查分母的两个因子。因子 $(z-1)^3$ 在积分围道 C 的内部及其上不为零。但是，$(z-5)^2$ 在 C 内的点 $z=5$ 为零。因此，我们将积分改写成

$$\oint_C \frac{\left(\frac{\cos z}{(z-1)^3}\right)}{(z-5)^2}\mathrm{d}z。$$

取$n=1$，$z_0=5$，$f(z)=\cos z/(z-1)^3$，应用公式(2-14)，于是

$$\oint_C \frac{\left(\frac{\cos z}{(z-1)^3}\right)}{(z-5)^2}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{\cos z}{(z-1)^3}\bigg|_{z=5}$$

$$=2\pi\mathrm{i}\frac{-64\sin 5-48\cos 5}{4^6}。$$

1.4 柳微尔定理与莫雷拉定理

定理8（柯西、柳微尔(Liouville)定理） 如果函数$f(z)$在整个复平面$\mathscr{D}$上解析的，并且是有界的，那么它必定是一个常数。

证明 设z_1、z_2是任何两点，又设C是以z_1为中心和半径为$\rho\geqslant 2|z_1-z_2|$的圆周，因此，当z在C上时，$|z-z_2|\geqslant\frac{1}{2}\rho$。由柯西公式，有

$$f(z_1)-f(z_2)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\left(\frac{1}{z-z_1}-\frac{1}{z-z_2}\right)f(z)\mathrm{d}z,$$

于是

$$|f(z_1)-f(z_2)|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_C\frac{(z_1-z_2)f(z)\mathrm{d}z}{(z-z_1)(z-z_2)}\right|$$

$$<\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|z_1-z_2|M}{\frac{1}{2}\rho}\mathrm{d}\theta$$

$$=2|z_1-z_2|M/\rho,$$

其中M是$f(z)$的上界。固定z_1和z_2，令$\rho\to+\infty$，立即得到$f(z_1)=f(z_2)$。由于z_1，z_2是任意的，故$f(z)$是一个常数。

定理9（莫雷拉(Morera)定理） 如果函数$f(z)$在单连通区域$\mathscr{D}$内是连续的，并且积分$\int_C f(z)\mathrm{d}z$沿着任何一条位于$\mathscr{D}$内的若当闭曲线

C 都等于零，那么，$f(z)$在这个区域$\mathscr{D}$内是正则的。

证明 由定理的条件可知，在区域$\mathscr{D}$内积分$\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z$ 与积分的路线无关，这就是说，当点 z_0 固定时，这个积分便确定了 z 的一个单值函数：

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z。$$

不难证明：$F(z)$在$\mathscr{D}$内是解析的，并且

$$F'(z)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z=f(z)。\qquad (2\text{-}17)$$

事实上，根据导数的定义及积分的性质(2-4)式和(2-6)式，可知

$$\begin{aligned}F'(z)&=\lim_{h\to 0}\frac{F(z+h)-F(z)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\int_{z_0}^{z+h} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta-\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right\}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta。\end{aligned}\qquad (2\text{-}18)$$

$f(z)$在点 z 处是连续的，可以写成

$$f(\zeta)=f(z)+\eta(\zeta),$$

其中当 $\zeta\to z$ 时；$\eta(\zeta)\to 0$；把上式代入(2-18)式，我们得到

$$F'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(z)\,\mathrm{d}\zeta+\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{z}^{z+h}\eta(\zeta)\mathrm{d}\zeta,\qquad (2\text{-}19)$$

由于$f(z)$是一个常数，所以

$$\int_{z}^{z+h} f(z)\mathrm{d}\zeta=f(z)\int_{z}^{z+h}\mathrm{d}\zeta=f(z)\cdot h,$$

因为由定义，可以直接得出$\int_{z}^{z+h}\mathrm{d}z=h$，另外，由定理 1，有

$$\left|\int_{z}^{z+h}\eta(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right|\leqslant\max|\eta(\zeta)|\cdot|h|,$$

因此，(2-19)式中的第一个极限等于 $f(z)$，第二个极限等于零，故 $F'(z)=f(z)$。而根据定理 7，$F'(z)$ 也是解析的，故 $f(z)$ 是解析的。

1.5 最大模原理与许瓦茨引理

定理 10 若函数 $f(z)$ 在圆 $|z-a|<R$ 内解析，则

$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+re^{i\theta})d\theta,\quad 0<r<R。\tag{2-20}$$

这个公式称为**平均值公式**，或称为解析函数的**中值定理**。

证明 设 γ 是圆周 $|z-a|=r<R$，令 $z-a=re^{i\theta}$，由柯西公式我们便得出

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(z)dz}{z-a}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(a+re^{i\theta})}{re^{i\theta}}ire^{i\theta}d\theta,$$

即

$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+re^{i\theta})d\theta。$$

定理 11（最大模原理） 若函数 $f(z)$ 在区域 $\mathscr{D}$ 内是解析的，并且不为常数，则模 $|f(z)|$ 不可能在 $\mathscr{D}$ 的任何一个内点达到最大值。

证明 设 $M=\sup\limits_{z\in\mathscr{D}}|f(z)|$。若 $M=+\infty$，则定理显然成立。

由于 $f(z)$ 不是常数，所以 $M\neq 0$，因而 $0<M<+\infty$。若在 $\mathscr{D}$ 内存在一点 a，使得 $M=|f(a)|$，则 $|f(z)|\leqslant|f(a)|$。设 d 是点 a 到区域 $\mathscr{D}$ 的边界的距离，显然 $d>0$。由于 $f(z)$ 在 $|z-a|<d$ 内是解析的，令 $z-a=re^{i\theta}$，则由平均值公式，对任何 $r<d$，

$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+re^{i\theta})d\theta。$$

因为对所有的 θ，$|f(a+re^{i\theta})|\leqslant|f(a)|$，若令 $f(z)/f(a)=\rho e^{i\varphi}$，则 ρ 和 φ 都是 θ 的函数，且 $\rho\leqslant 1$。于是，我们可将上述平均值公式改写成

$$1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\rho e^{i\varphi}d\theta。\tag{2-21}$$

因此

$$1\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\rho d\theta\leqslant 1,$$

这就得到
$$\int_0^{2\pi}(1-\rho)d\theta=0.$$
但是由于被积函数是非负的，所以对所有的 θ，$\rho\equiv1$。在(2-21)式中取实部，我们得到
$$1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\theta,$$
即 $\int_0^{2\pi}(1-\cos\varphi)d\theta=0$。再由于被积函数的非负性，$\cos\varphi\equiv1$。因此，在圆周 $|z-a|=r$ 上 $f(z)=f(a)$。由于 $r<d$ 的任意性，$f(z)=f(a)$ 对位于圆 $|z-a|<d$ 内的一切点 z 都成立。

现在我们来证明对$\mathscr{D}$内的任何一点 p，有 $f(p)=f(a)$。如图2.6所示，用$\mathscr{D}$内一折线 l 连接 a 和 p，这总是能做到的，因区域$\mathscr{D}$是连络的。设 δ 是 l 到$\mathscr{D}$的边界的距离，显然 $\delta>0$。在 l 上取点 $z_0=a$, $z_1,z_2,\cdots,z_n=p$，使得相邻两点间的距离$<\eta<\delta$；分别以这 $n+1$ 个点为中心，以 η 为半径作圆 $\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_n$，显然这 $n+1$ 个圆全位于$\mathscr{D}$内。

设 d_j 是点 z_j 到$\mathscr{D}$边界的距离，显然 $d_j>\delta(j=0,1,\cdots,n)$。我们已经证明在圆 $|z-a|<d_0$ 内，$f(z)=f(a)$，由于 z_1 在圆 γ_0 内，所以 $f(z_1)=f(a)$，因而 $|f(z_1)|=M$。于是根据以上所证得的结果，在圆 $|z-z_1|<d_1$ 内，因而在圆 γ_1 内，$f(z)=f(z_1)$。因点 z_2 在 γ_1 内，所以 $f(z_2)=f(z_1)=f(a)$，因而 $|f(z_2)|=M$。因此，在圆 γ_2 内有 $f(z)=$

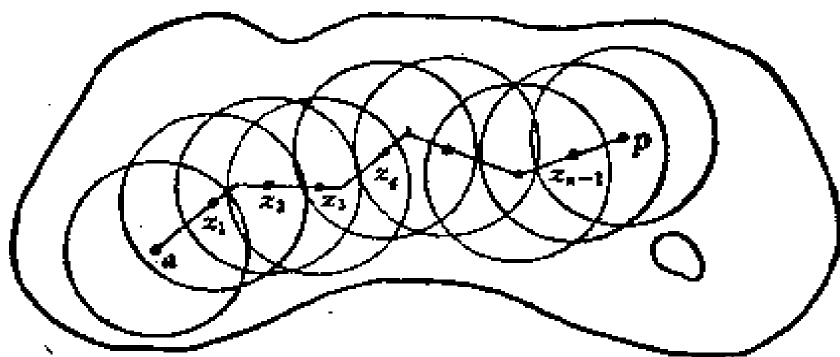


图 2.6

$f(z_2)=f(a)$。……如此继续下去，最后我们得到 $f(z_n)=f(p)=f(a)$。由于 p 是区域$\mathscr{D}$内的任意一点，故在区域$\mathscr{D}$内有 $f(z)=f(a)$，这是与

假设矛盾的，故定理成立。

推论 若函数 $f(z)$ 在有界区域 $\mathscr{D}$ 内解析，在闭区域 $\overline{\mathscr{D}}$ 上连续，并且不为常数，则 $|f(z)|$ 只能在 $\mathscr{D}$ 的边界 $\partial\mathscr{D}$ 上达到最大值。

事实上，由于 $f(z)$ 在 $\overline{\mathscr{D}}$ 上连续，则 $|f(z)|$ 在 $\overline{\mathscr{D}}$ 上连续。因为 $\overline{\mathscr{D}}$ 是有界闭集，所以 $|f(z)|$ 在 $\overline{\mathscr{D}}$ 上达到其最大值。由上述定理，这最大值只能出现在 $\mathscr{D}$ 的边界 $\partial\mathscr{D}$ 上。

许伐茨(Schwarz)引理 若函数 $f(z)$ 在单位圆 $|z|<1$ 内解析，且满足条件，$f(0)=0$，$|f(z)|\leqslant 1$，那么，在 $|z|<1$ 内必有

$$|f(z)|\leqslant|z|, \tag{2-22}$$

且

$$|f'(0)|\leqslant 1。 \tag{2-23}$$

如果在圆内存在一个点 z_0，使 $|f(z_0)|=|z_0|$，则

$$f(z)=e^{i\alpha}z,$$

其中 α 是任何一个实数。

证明 作函数

$$\varphi(z)=\begin{cases}f(z)/z, & 当\ z\neq 0,\\ f'(0), & 当\ z=0。\end{cases}$$

显然，函数 $\varphi(z)$ 在圆环 $0<|z|<1$ 中是解析的。由于

$$\lim_{z\to 0}\varphi(z)=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=f'(0),$$

所以，$\varphi(z)$ 在单位圆内是连续的。现在我们来证明 $\varphi(z)$ 在单位圆内也是解析的。根据莫雷拉定理，只要证明对单位圆内的任何若当闭曲线 γ，$\int_\gamma\varphi(z)dz=0$ 就行了。若 γ 的内部不含有原点 $z=0$，即 γ 及其内部完全位于圆环 $0<|z|<1$ 内，根据柯西定理，则 $\int_\gamma\varphi(z)dz=0$。若 γ 的内部含有原点 $z=0$，此时，作充分小的圆周 $\gamma_\varepsilon:|z|=\varepsilon>0$，根据柯西定理和柯西积分公式，我们有

$$\int_\gamma\varphi(z)dz=\int_{\gamma_\varepsilon}\varphi(z)dz=\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{f(z)dz}{z}$$

$$=2\pi i f(0)=0。$$

若原点 $z=0$ 位于 γ 上，此时，令 γ' 表示 γ 在圆 $|z|<\varepsilon$ 之外的那部分曲线，γ'_ε 表示 γ_ε 位于 γ 内部的那部分圆弧（图2.7），显然，当 $\varepsilon\to 0$ 时，$\gamma'\to\gamma$，$\gamma'_\varepsilon\to$ 原点 $z=0$，这样 $\gamma'+\gamma'_\varepsilon$ 构成一条若当闭曲线，它的内部完全位于圆环 $0<|z|<1$ 中，因此，据柯西定理，我们有

$$\int_{\gamma'}\varphi(z)\mathrm{d}z=\int_{\gamma'_\varepsilon}\varphi(z)\mathrm{d}z$$

$$=\mathrm{i}\int_{\alpha_\varepsilon}^{\beta_\varepsilon}f(\varepsilon e^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta,$$

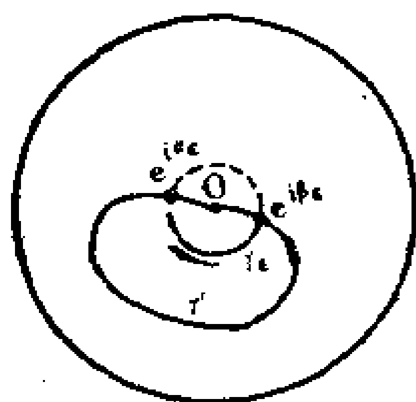


图 2.7

其中 $e^{\mathrm{i}\alpha_\varepsilon}$，$e^{\mathrm{i}\beta_\varepsilon}$ 是 γ 与 γ_ε 的交点，$0\leqslant\alpha_\varepsilon$，$\beta_\varepsilon<2\pi$。由于当 $\varepsilon\to 0$ 时，$f(\varepsilon e^{\mathrm{i}\theta})\to 0$，因此，若对上述等式的两边令 $\varepsilon\to 0$，便有

$$\int_\gamma\varphi(z)\mathrm{d}z=0。$$

所以，$\varphi(z)$ 在 $|z|<1$ 内是解析的。

在圆周 $|z|=r<1$ 上，成立

$$|\varphi(z)|=\left|\frac{f(z)}{z}\right|\leqslant\frac{1}{r}。$$

由最大模原理，这个不等式在 $|z|\leqslant r$ 上也成立。上式中令 $r\to 1$，便得到 $|\varphi(z)|\leqslant 1$，故 $|f(z)|\leqslant|z|$，$|f'(0)|\leqslant 1$。

若在 $|z|<1$ 内存在一点 $z_0(z_0\neq 0)$，使 $|f(z_0)|=|z_0|$，于是 $|\varphi(z_0)|=1$；或者若 $|f'(0)|=1$，则 $|\varphi(0)|=1$。根据最大模原理，$\varphi(z)=e^{\mathrm{i}\alpha}$，$\alpha$ 是任一实数，故 $f(z)=e^{\mathrm{i}\alpha}z$。

定理 12（鲍雷尔-卡拉太屋独利（Borel-Caratheodory）定理） 设 $f(z)$ 是闭圆 $|z|\leqslant R$ 上的解析函数，设 $\|f\|_r=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$，$r<R$，则

$$\|f\|_r\leqslant\frac{2r}{R-r}\|\mathrm{Re}f\|_R+\frac{R+r}{R-r}|f(0)|,\tag{2-24}$$

其中 $\|\mathrm{Re}f\|_R=\max\limits_{|z|=R}|\mathrm{Re}f(z)|$。

证明 令 $A=\|\mathrm{Re}f\|_R$。首先假定 $f(0)=0$，令

$$g(z)=\frac{f(z)}{z(2A-f(z))}。$$

则利用莫雷拉定理不难证明 g 在 $|z|\leqslant R$ 上是解析的。此外，若 $|z|=R$，则 $|2A-f(z)|\geqslant|f(z)|$。因此，$\|g\|_R\leqslant 1/R$。由最大模原理，我们有 $\|g\|_r\leqslant\|g\|_R$，因此，若 $|z|=r$，则

$$\frac{|f(z)|}{r|2A-f(z)|}\leqslant\frac{1}{R}。$$

从而，$|f(z)|\leqslant\frac{r}{R}(2A+|f(z)|)$，于是，我们有

$$\|f\|_r\leqslant\frac{2r}{R-r}\|\mathrm{Re}f\|_R。$$

在一般情况下，我们将所得估计应用于函数 $h(z)=f(z)-f(0)$，则 $\|\mathrm{Re}h\|_R\leqslant\|\mathrm{Re}f\|_R+|f(0)|$，并且，若 $|z|=r$，我们得到

$$|f(z)-f(0)|\leqslant\frac{2r}{R-r}[A+|f(0)|],$$

从而，我们有

$$|f(z)|\leqslant\frac{2r}{R-r}(A+|f(0)|)+|f(0)|。$$

这就是我们所要证明的结果。

1.6 圆和半平面上的迪利希莱（Dirichlet）问题——泊松积分公式

在第一章的 §2.5 中，我们曾讨论过调和函数与解析函数之间的密切联系。在这一节中，我们将继续阐述这种联系。

具有物理应用的一类重要的数学问题是迪利希莱（Dirichlet）问题，即要找一个未知函数，它在某个区域内是调和的，而且在这个区域的边界上取得预先指定的值。例如图 2.8 所示，一半径为 1 的圆柱体充满导热的物质。我们知道，圆柱体内的温度是由调和函数 $T(r,\theta)$ 来描述的。若圆柱体表面的温度是已知的，是由 $\sin\theta\cos^2\theta$ 所给定的，由于 $T(r,\theta)$ 在 $0\leqslant r\leqslant 1$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 上是连续的，因此，我们的问

题是要求一个单位圆上的调和函数 $T(r,\theta)$，使得 $T(1,\theta)=\sin\theta\cos^2\theta$。这就是我们所要解的迪利希莱问题。

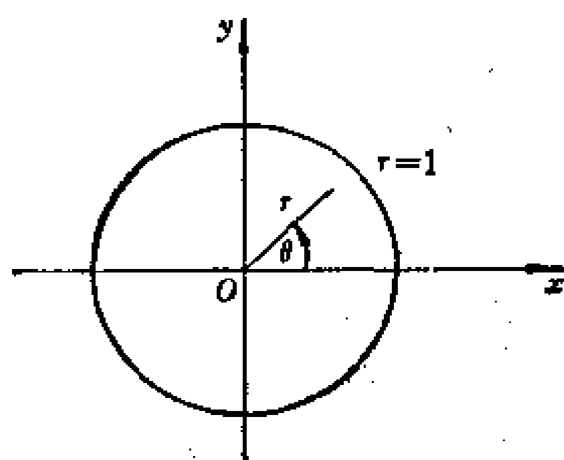


图 2.8

我们刚才所讨论的迪利希莱问题，其边界是简单的几何形状，如在大多数关于偏微分方程的教科书中所述的，通常用变量分离法来解，对更复杂的形状，有时要用共形映照的方法。这种方法将在以后讨论。在这节里，我们只讨论区域的边界是圆周或无限直线的情况。

一、圆的迪利希莱问题

对解边界为圆周的迪利希莱问题，柯西积分公式是有帮助的。考虑 z-复平面上半径为 R、中心为原点的圆（见图 2.9）设 $f(z)$ 是在圆周 $|z|=R$ 上及其内解析的函数。对这函数 $f(z)$ 和这圆周应用柯西积分公式，对圆内的任何一点 z，我们有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|w|=R}\frac{f(w)}{w-z}dw. \tag{2-25}$$

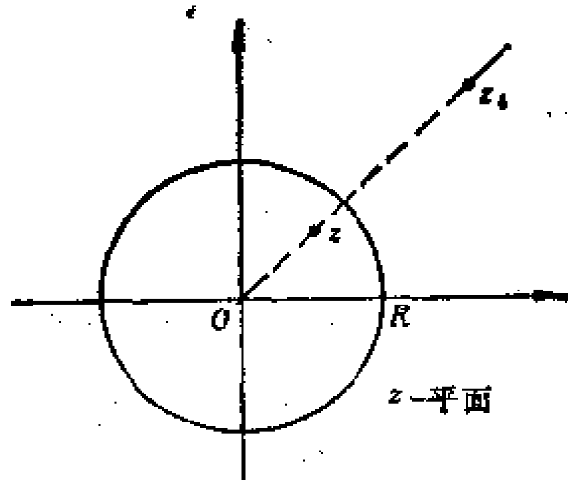


图 2.9

令 $z_1=R^2/\bar{z}$，它位于过原点和点 z 的射线上，且 $|z_1|=R^2/|z|>R$，因此，z_1 位于圆 $|z|\leqslant R$ 的外部。于是，由柯西定理，我们有

$$\begin{aligned}0&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|w|=R}\frac{f(w)}{w-z_1}dw\\&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|w|=R}\frac{f(w)}{w-\frac{R^2}{\bar{z}}}dw.\end{aligned} \tag{2-26}$$

将(2-25)式与(2-26)式的两边分别相减，我们获得

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|w|=R} f(w)\left[\frac{z-\frac{R^2}{\bar{z}}}{(w-z)\left(w-\frac{R^2}{\bar{z}}\right)}\right]dw。\qquad(2\text{-}27)$$

令 $w=Re^{i\varphi}$，$z=re^{i\theta}$，于是 $\bar{z}=re^{-i\theta}$。将它们代入 (2-27) 式，我们有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi})\left[\frac{\left(re^{i\theta}-\frac{R^2}{r}e^{i\theta}\right)Re^{i\varphi}}{(Re^{i\varphi}-re^{i\theta})\left(Re^{i\varphi}-\frac{R^2}{r}e^{i\theta}\right)}\right]d\varphi。$$

将分子和分母同时乘以 $-(r/R)e^{-i(\varphi+\theta)}$，则分子$=R^2-r^2$，分母$=(Re^{i(\varphi-\theta)}-r)(Re^{-i(\varphi-\theta)}-r)=|Re^{i(\varphi-\theta)}-r|^2=R^2+r^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)$，于是，最后我们有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)}\right)f(Re^{i\varphi})d\varphi。$$

现将解析函数 $f(z)$ 表示成其实部 U 和 V，于是，$f(re^{i\theta})=U(r,\theta)+iV(r,\theta)$，$f(Re^{i\varphi})=U(R,\varphi)+iV(R,\varphi)$，上述方程成为

$$U(r,\theta)+iV(r,\theta)$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)}[U(R,\varphi)+iV(R,\varphi)]d\varphi。$$

由于这个方程两边的实部必相等，于是我们得到下列泊松 (Poisson) 公式

$$U(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{U(R,\varphi)(R^2-r^2)}{R^2+r^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)}d\varphi。\qquad(2\text{-}28)$$

对 $V(r,\theta)$ 与 $V(R,\varphi)$，我们也有类似的公式。

泊松积分公式 (2-28) 是重要的。这个公式告诉我们：当 U 在圆周 $|w|=R$ 上的取值 $U(R,\varphi)$ 已知时，则调和函数 $U(r,\theta)$ 在这圆内任意一点的值由公式(2-28)所给出。

由于我们要求 $f(z)$ 在这半径为 R 的圆周上及其内部是解析的，因此读者必须假定方程(2-28)中的函数 $U(R,\varphi)$ 是连续的。事实上，这条件可放宽成允许 $U(R,\varphi)$ 有有限个"跳跃的"不连续点，泊松公

式仍成立。

例 2-6 如图 2.10 所示，设一根半径为 1 的导电的管子被无限裂缝分成两半。上半管 ($R=1, 0<\varphi<\pi$) 保持 1 伏特的电位，下半管 ($R=1, \pi<\varphi<2\pi$) 保持 -1 伏特的电位。求在管内任何一点 (r, θ) 的势。

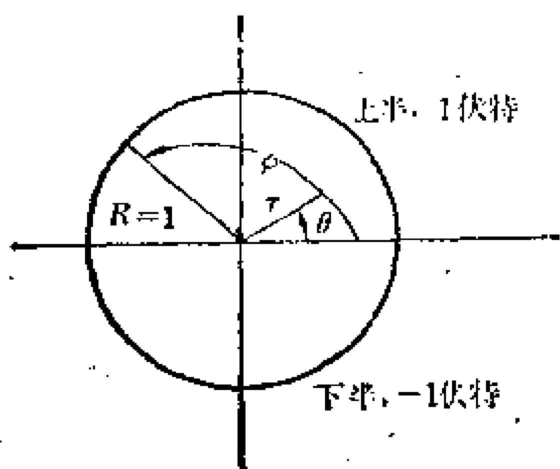


图 2.10

解 由于电位势是个调和函数，因此泊松公式是可用的。由公式(2-28)，$R=1$，我们有

$$U(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{(1-r^2)\mathrm{d}\varphi}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\theta)}-\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{(1-r^2)\mathrm{d}\varphi}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\theta)}。\tag{2-29}$$

在每个积分中，我们作变数变换 $x=\varphi-\theta$，并利用下述积分公式

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x}=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\,\mathrm{tg}^{-1}\left[\frac{\sqrt{a^2-b^2}\,\mathrm{tg}(x/2)}{a+b}\right]。\tag{2-30}$$

取 $a=1+r^2$，$b=-2r$，我们得到

$$U(r,\theta)=\frac{1}{\pi}\left[2\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{1+r}{1-r}\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right)-\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{1+r}{1-r}\mathrm{tg}\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right)\right)-\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{1+r}{1-r}\mathrm{tg}\left(-\frac{\theta}{2}\right)\right)\right]。\tag{2-31}$$

由于反正切函数是多值函数，在应用这个公式时，必须取适当的单值支，使得 $U(r,\theta)$ 对一切 $r<1$ 是连续的和 $U(1,\theta)$ 仅在裂缝 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 时是不连续的。

二、对于半平面的迪利希莱问题

我们的问题是要在上半 $w=u+\mathrm{i}v$-平面上求一个函数 $\varphi(u,v)$，使得它在上半平面（$v>0$ 的区域）上是调和的，而在实数轴 $v=0$ 上 $\varphi(u,v)$ 必须满足预先给定的边界条件 $\varphi(u,0)$。

设 $f(w)=\varphi(u,v)+\mathrm{i}\psi(u,v)$ 在 $v\geqslant 0$ 上是解析的。考虑闭围道 C_R，它由半径为 R 的上半圆周 γ_R 和实数轴上的线段 $l_R[-R,R]$ 所组

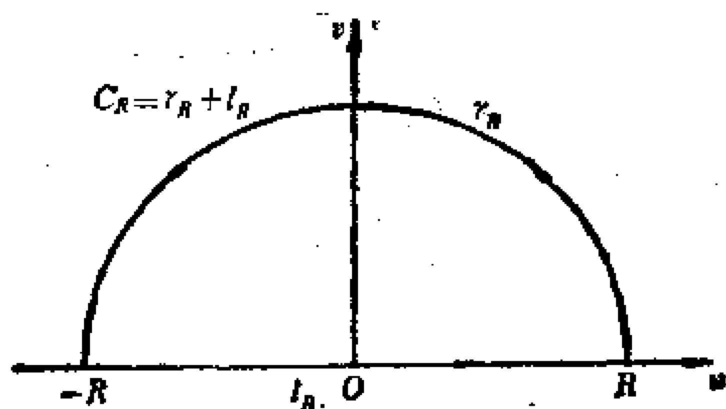


图 2.11

成。令 z 是 C_R 内任何一点，由柯西积分公式，我们有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_R}\frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w。\tag{2-32}$$

由于 z 位于上半平面，则 $\bar{z}$ 必位于下半平面，因此，它必在 C_R 的外部。于是，据柯西定理，有

$$0=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_R}\frac{f(w)}{w-\bar{z}}\,\mathrm{d}w。\tag{2-33}$$

将(2-32)式和(2-33)式的两边分别相减，我们获得

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_R}f(w)\left(\frac{1}{w-z}-\frac{1}{w-\bar{z}}\right)\mathrm{d}w\\&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_R}\frac{f(w)(z-\bar{z})}{(w-z)(w-\bar{z})}\,\mathrm{d}w\\&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\gamma_R}\frac{(z-\bar{z})f(w)}{(w-z)(w-\bar{z})}\,\mathrm{d}w\\&\quad+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{l_R}\frac{(z-\bar{z})f(w)}{(w-z)(w-\bar{z})}\,\mathrm{d}w\end{aligned}\tag{2-34}$$

令 $z=x+iy$，则 $\bar{z}=x-iy$。上式右端的第二个积分 I_2 等于

$$\frac{y}{\pi}\int_{-R}^{R}\frac{f(u)\mathrm{d}u}{(u-x)^2+y^2}。\tag{2-35}$$

记(2-34)右端的第一个积分为 I_1，在 γ_R 上 $w=Re^{it}$，我们有

$$|I_1|\leqslant\frac{y}{\pi}\int_{\gamma_R}\left|\frac{f(Re^{it})}{(w-z)(w-\bar{z})}\right||\mathrm{d}Re^{it}|$$

$$\leqslant\frac{y}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{|f(Re^{it})|R}{(R-|z|)^2}\mathrm{d}t。$$

若在上半平面 $v\geqslant0$ 上 $|f(w)|\leqslant M<\infty$，则得

$$|I_1|\leqslant|y|M\frac{R}{(R-|z|)^2}。$$

于是，对任意给定的点 z，我们有

$$\lim_{R\to+\infty}I_1=0。\tag{2-36}$$

由于(2-34)式对任何 $C_R(R>|z|)$ 都是成立的，因此，我们有

$$f(z)=\lim_{R\to\infty}(I_1+I_2)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(u)\mathrm{d}u}{(u-x)^2+y^2}。\tag{2-37}$$

将 $f(z)$ 和 $f(w)$ 用它们的实部和虚部来表示，$f(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$，$f(w)=\varphi(u,v)+i\psi(u,v)$，由(2-37)式，我们有

$$\varphi(x,y)+i\psi(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(u,0)+i\psi(u,0)}{(u-x)^2+y^2}\mathrm{d}u。$$

于是，取实部，我们即得对上半平面的泊松积分公式：

$$\varphi(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(u,0)}{(u-x)^2+y^2}\mathrm{d}u。\tag{2-38}$$

关于 $\psi(x,y)$ 与 $\psi(u,0)$ 也有相似的公式。

当 φ 在整个实数轴上的值完全已知时，泊松积分公式（2-38）给出了调和函数 $\varphi(x,y)$ 在上半平面内每一点的值。我们能证明，在上半平面上有界的迪利希莱问题的解是唯一的。

若没有这个限制，还能找到其他的解。

在我们的推导过程中，我们假定，$\varphi(u,v)$ 是在闭上半平面 $v=\mathrm{Im}\,w\geqslant0$ 上解析的函数 $f(u,v)$ 的实部，这要求方程（2-38）中的函数

$\varphi(u,0)$对$-\infty<u<+\infty$是连续的。事实上，这个要求可以放松，若$\varphi(u,0)$有有限多个跳跃点（即第一类不连续点），方程(2-38)仍然是成立的。

例 2-7 如图 2.12 所示，上半空间 $I_m w>0$ 充满着导热的物质。

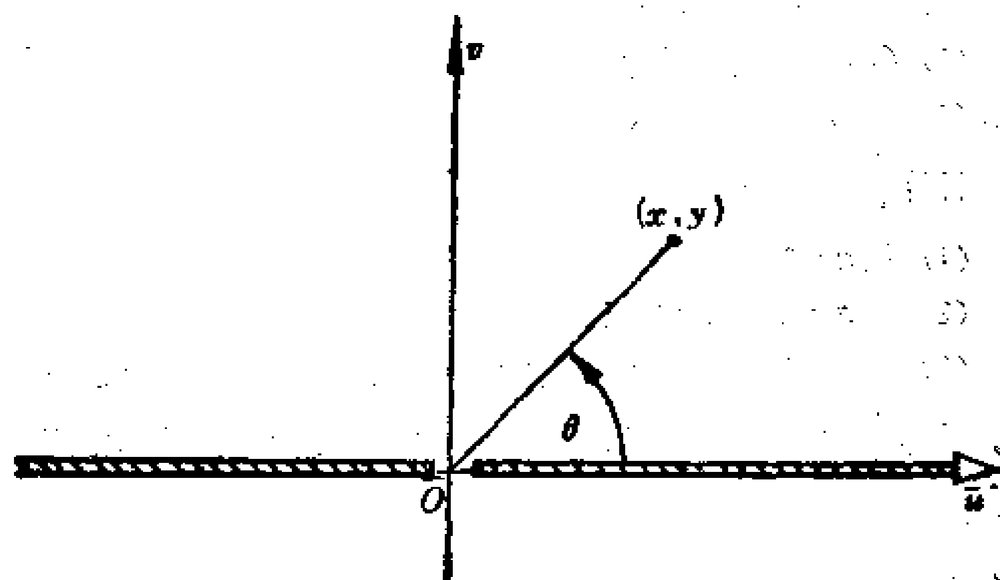


图 2.12

在边界 $v=0$，$u>0$ 上，温度保持在 0℃，而在边界 $v=0$，$u<0$ 上，温度保持在 T_0℃。求整个导体的稳定的温度分布 $\varphi(x,y)$。

解 我们知道，温度 $\varphi(x,y)$ 是一个调和函数，泊松积分公式(2-38)是直接可用的。我们有 $\varphi(u,0)=T_0$，$u<0$；又 $\varphi(u,0)=0$，$u>0$。于是

$$\varphi(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{T_0 du}{(u-x)^2+y^2}+\frac{y}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{0 du}{(u-x)^2+y^2}.$$

第二个积分是零。在第一个积分中作变量变换 $p=x-u$，则

$$\varphi(x,y)=\frac{T_0 y}{\pi}\int_{x}^{\infty}\frac{dp}{p^2+y^2}=\frac{T_0}{\pi}\operatorname{tg}^{-1}\frac{p}{y}\Big|_{x}^{\infty}=\frac{T_0}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{y}\right]. \tag{2-39}$$

由于 $\pi/2-\operatorname{tg}^{-1}(x/y)=\operatorname{tg}^{-1}(y/x)=\theta$，故 $0\leqslant\varphi(x,y)=\frac{T_0}{\pi}\theta\leqslant T_0$。

习　题

1. 计算$\int_{0+i}^{1+ie}\bar{z}\,dz$沿路径$C$的积分值，其中：

(1) C是曲线$y=e^x$；

(2) C是由水平线段$y=1$，$0\leqslant x\leqslant 1$和垂直线段$x=1$，$1\leqslant y\leqslant e$所组成。比较(1)与(2)的所得结果。

2. 计算$\int e^z dz$：

(1) 从$z=0$到$z=1$沿直线$y=0$积分；

(2) 从$z=1$到$z=1+i$沿直线$x=1$积分；

(3) 从$z=1+i$到$z=0$沿$y=x$积分。所得三个积分值之和是零。

3. 计算$\int(x+i\log|z|)dz$沿弧$|z|=1$，$\pi/4\leqslant \arg z\leqslant\pi/2$，从$\exp(i\pi/4)$到i的值。

4. 下列诸积分中哪个可直接应用柯西定理：

(1) $\oint_{|z|=1}\frac{\cos z}{z}dz$；　　(2) $\oint_{|z-i|=1}\frac{\cos z}{z}dz$；

(3) $\oint_{|z-2i|=1}\frac{\cos z}{z}dz$；　　(4) $\oint_{|z-(1+i)|=1}\log z\,dz$；

(5) $\oint_C\log z\,dz$，其中C是顶点为$1\pm i$，$-1\pm i$的正方形；

(6) $\oint_C(az^2+bz+c)dz$，其中C是闭围道$x^2/a^2+y^2/b^2=1$，a和b是实数；

(7) $\oint_C\frac{dz}{z^2+z+1}$，其中C是围道$4x^2+9y^2=1$；

(8) $\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+z+1}$。

5. 令n是任何整数，r是一正实数，又z_0是任一复数。证明：

$$\oint_{|z-z_0|=r}(z-z_0)^n dz=\begin{cases}0, & n\neq-1;\\ 2\pi i, & n=-1.\end{cases}$$

6. 设C是由直线$x=0$，$x=2$，$y=-1$，$y=1$所构成的正方形。计算下

列积分沿 C 的积分值：

(1) $\oint \frac{dz}{(z-1)}$；　　(2) $\oint \frac{dz}{(z-1)^2}$；

(3) $\oint (z-1)dz$；　　(4) $\oint [(1-z)^{-1}+2(1-z)^{-2}dz$；

(5) $\oint \frac{dz}{(z-1+0.5i)^{50}}$；　　(6) $\frac{dz}{(z-3)}$。

7．计算：

$$\oint_{|z-1|=3} [(z-2)+(z-2)^{-1}]^3 dz.$$

8．证明：

$$\oint_{|z|=1/2} \frac{\operatorname{ch}z}{z(z-1)} dz = \oint_{|z|=1/2} -\frac{\operatorname{ch}z}{z} dz.$$

9．(1) 求 $\oint_C [(\cos z \sin z)/(z+2)]dz$，其中 C 是椭圆 $x^2/9+y^2/16=1$；

(2) 重复(1)，椭圆为 $x^2+y^2/16=1$；

(3) 求 $\oint \{(\cos z \sin z)/[(z+2)(z-5)]\}dz$，其中 C 与 (1) 中的一样；

(4) 求(3)中的积分，但 C 是(2)中的椭圆。

10．(1) 求 $\oint_C [(\operatorname{ch}z)/(z^2+z+1)]dz$，其中 C 是圆周 $|z+(1+i)|=1$；

(2) 重复(1)，但 C 取成圆周 $|z-(1+i)|=1$。

11．(1) 求 $\oint_C \log z/[z(z-2)^2]dz$，其中 C 是圆周 $|z-2|=1$；

(2) 求 $\oint_C (e^{2z}/z^6)dz$，其中 C 是由直线 $x=1$ 和抛物线 $y^2=x+1$ 所组成的闭围道。

12．求 $\oint_C [\cos z/(z-\pi)^2]dz$，其中 C 是圆周 $|z-\pi|=1$。

13．设 $f(z)$ 在闭围道 C 上及其内除去 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 外是解析的，证明：

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)}dz$$

$$= \frac{f(z_1)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)\cdots(z_1-z_n)}$$

$$+ \frac{f(z_2)}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)\cdots(z_2-z_n)}$$

$$+\cdots+\frac{f(z_n)}{(z_n-z_1)(z_n-z_2)\cdots(z_n-z_{n-1})}.$$

14．计算下列积分：

(1) $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^z\cos z\,dz}{(z-1)(z-2)}$，其中 C 是 $|z|=3$；

(2) $\oint_C \frac{dz}{z^2-3z+2}$，其中 C 是由 $x=\pm4$ 和 $y=\pm4$ 所构成的正方形；

(3) $\oint_C \frac{\sin(z-2)}{(z-2)(z+1)}dz$，其中 C 就是(2)中的 C；

(4) $\oint_C \frac{e^z}{(z-1)^2(z+1)}dz$，其中 C 就是(2)中的 C。

15．计算下列积分(提示：利用中值公式(2-20))：

(1) $(1/2\pi)\int_0^{2\pi} e^{(e^{i\theta})}d\theta$；　　(2) $\int_0^{2\pi}\log(\cos\theta+5/4)d\theta$；

(3) $\int_0^{2\pi}\cos(\cos\theta+i\sin\theta)d\theta$，(提示：$\cos\theta+5/4=|1+1/2e^{i\theta}|^2$)；

(4) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\cos\theta)\mathrm{ch}(\sin\theta)d\theta$。

16．设函数 $f(z)$ 在 C 上解析，且有界，求极限：

$$\lim_{R\to\infty}\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}dz,\ a,b \text{ 是常数。}$$

由此可得到柳微尔定理的另一证明。

17．证明：若函数 $f(z)$ 在单位圆 $|z|<1$ 内解析，并且 $|f(z)|\leqslant 1/(1-|z|)$ $(|z|<1)$，则对于 $0<r<1$ 有

$$|f^{(n)}(0)|\leqslant n!/r^n(1-r).$$

18．设函数 $\varphi(\zeta)$ 在可求长曲线 γ 上连续，证明：函数(柯西型积分)

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

在不包含 γ 上的点的任意区域内是解析的，并且

$$\Phi^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta,\ n=1,2,3,\cdots.$$

19. 设函数 $f(z)$ 在圆 $|z|<R$ 内解析，并且 $|f(z)|\leqslant M$，$f(0)=0$，证明：

$$|f(z)|\leqslant \frac{M}{R}|z|, \qquad |f'(0)|\leqslant \frac{M}{R},$$

其中等号仅当 $f(z)=\frac{M}{R}e^{i\alpha}z$（$\alpha$ 为实数）时才成立。

20. 若非常数函数 $f(z)$ 在区域 $\mathscr{D}$ 内解析，在闭区域 $\overline{\mathscr{D}}$ 上连续且 $\neq 0$，则 $|f(z)|$ 在 $\overline{\mathscr{D}}$ 上的最小值必出现在 $\mathscr{D}$ 的边界上。

21. 设函数 $u(x,y)$ 在闭区域 $\overline{\mathscr{D}}$ 上是实值的、非常值的连续函数，它在 $\mathscr{D}$ 内是调和的，证明：$u(x,y)$ 在这 $\overline{\mathscr{D}}$ 上的最大值必出现在 $\mathscr{D}$ 的边界上。这就是调和函数的最大模原理。

22. 设函数 $u(x,y)$ 如习题 21 所述，证明这函数的最小值发生在区域 $\mathscr{D}$ 的边界上。这就是调和函数的最小模原理。

23. 设函数 $f(z)$ 在圆 $|z|<R$ 内解析，在闭圆 $|z|\leqslant R$ 上连续，并且在 $|z|=R$ 上，$f(z)\neq 0$，$f(z)$ 在圆 $|z|<R$ 内的零点是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$（n 级就算 n 个），证明在圆 $|z|<R$ 内有

$$\log|f(z)|=-\sum_{k=1}^{n}\log\left|\frac{R^2-\overline{a_k}z}{R(z-a_k)}\right| +\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\varphi})|\operatorname{Re}\left(\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}\right)d\varphi.$$

特别地，若 $f(0)\neq 0$，则

$$\log|f(0)|=-\sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{R}{|a_k|}\right)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\varphi})|d\varphi. \qquad (2\text{-}40)$$

若 $z=0$ 是 $f(z)$ 的 m 级零点，则

$$\log\left|\frac{f^{(m)}(0)}{m!}\right|+m\log R =-\sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{R}{|a_k|}\right)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\varphi})|d\varphi. \qquad (2\text{-}41)$$

公式(2-40)和(2-41)被称为**零生**(Jensen)公式。若记 $\nu(x)$ 是 f 在 $|z|\leqslant x$ 内的零点的个数，$\|f\|_R=\sup\limits_{|z|=R}|f(z)|$，则若 $f(0)\neq 0$，我们有

$$\int_0^R\frac{\nu(x)}{x}dx\leqslant\log\|f\|_R-\log|f(0)|. \qquad (2\text{-}42)$$

其中 a_k 是 $f(z)$ 的零点，$a_k\neq 0$。(2-42)式被称为**零生不等式**。

(提示：考虑 $F(z)=f(z)\prod_{k=1}^{n}\frac{R^2-\overline{a_k}z}{R(z-a_k)}$，则 $F(z)$是 $|z|<R$ 内的解析函数，$F(z)\neq 0$。并且注意到当 $|z|=R$ 时，$\left|\frac{R^2-\overline{a_k}z}{R(z-a_k)}\right|=1$。)

24. (1) 半径为5的圆柱表面温度如下图2.13所示。证明：圆柱内部的稳定温度 $U(r,\theta)$由下式给出：

$$U(r,\theta)=\frac{100}{\pi}\left[\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{5+r}{5-r}\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right)\right.$$
$$\left.+\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{5+r}{5-r}\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\right)\right],$$

(2) 证明上述公式满足下述边界条件：

$$\lim_{r\to 5}U(r,\theta)=\begin{cases}100, & 0<\theta<\pi,\\ 0, & \pi<\theta<2\pi.\end{cases}$$

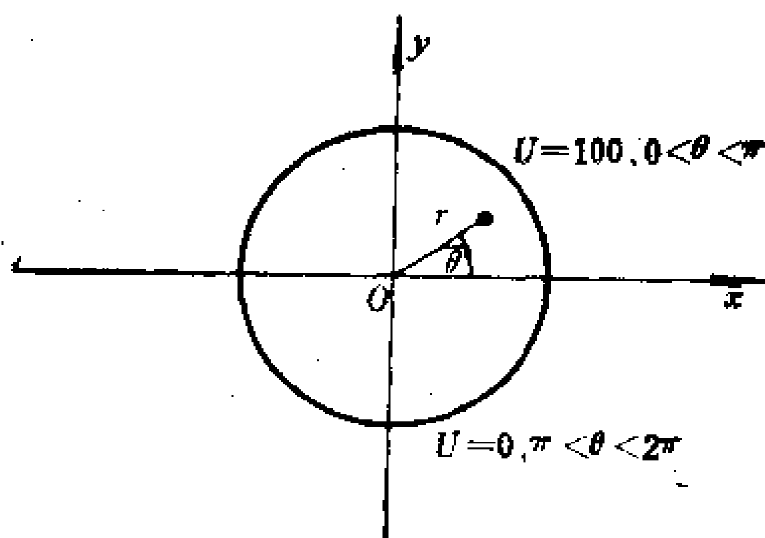


图 2.13

25. 设函数 $f(z)=U(r,\theta)+\mathrm{i}V(r,\theta)$在圆$|w|<R$ 的无界闭区域 $|w|\geqslant R$ 上是解析的，并且$|f(w)|\leqslant M<\infty$，利用二连区域的柯西积分公式和柯西积分定理，证明：对任何点 $z=re^{\mathrm{i}\theta}$，$r>R$，成立

$$U(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2-R^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)}U(R,\varphi)\mathrm{d}\varphi.$$

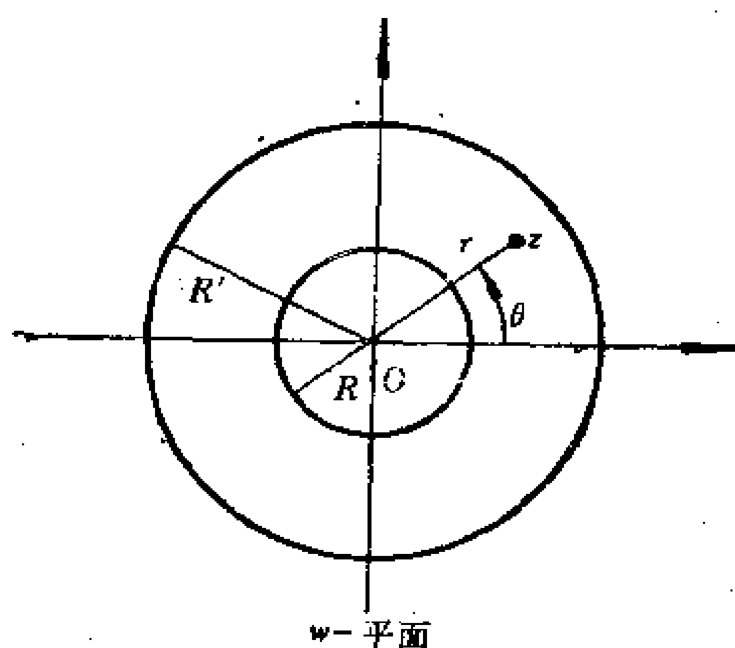


图 2.14

§2 用级数表示解析函数

2.1 魏尔斯特拉斯定理

在这一节中将讨论一些以后很重要的、有关解析函数的序列与级数的一致收敛性、逐项求积分和逐项求微分的问题。

设 $f_0(z), f_1(z), f_2(z), \cdots$ 是区域 $\mathscr{D}$ 内（或曲线 C 上）的一个函数序列，如果对于任何 $\varepsilon>0$，总存在一个只与 ε 有关的自然数 N，使得当 $n\geqslant N$ 时，对区域 $\mathscr{D}$ 内（或曲线 C 上）的一切点 z，不等式

$$|f_n(z)-f(z)|<\varepsilon \tag{2-43}$$

都成立，那么称这个函数列 $\{f_n(z)\}$ 在区域 $\mathscr{D}$ 内（或曲线 C 上）**一致收敛**于函数 $f(z)$。

我们先证明两个定理，它们与数学分析中的有关结果相类似。

定理 1 设 $f_0(z), f_1(z), f_2(z), \cdots f_n(z), \cdots$ 是区域 $\mathscr{D}$（或曲线 C）上的连续函数序列，若它们在区域 $\mathscr{D}$（或曲线 C）上一致收敛于函数 $f(z)$，则 $f(z)$ 也是个连续函数。

证明 设 z_0 是区域 $\mathscr{D}$（或曲线 C）的任意一个内点，对任意给定

的 $\varepsilon>0$，由于 $\{f_n(z)\}$ 一致收敛于 $f(z)$，因此，存在自然数 N，当 $n\geqslant N$ 时，对区域$\mathscr{D}$（或曲线 C）上一切 z，成立

$$|f_n(z)-f(z)|<\varepsilon/3。\tag{2-44}$$

由于 $f_n(z)$是连续的，则存在正数 δ，使得对区域$\mathscr{D}$内（或曲线 C 上）满足不等式 $|z-z_0|<\delta$ 的点 z 来说，成立

$$|f_n(z)-f_n(z_0)|<\varepsilon/3。\tag{2-45}$$

对这样的 z 和那个 n，由不等式(2-44)和(2-45)，我们便有

$$\begin{aligned}&|f(z)-f(z_0)|\\ &\leqslant|f(z)-f_n(z)|+|f_n(z)-f_n(z_0)|+|f_n(z_0)-f(z_0)|\\ &<\varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon.\end{aligned}$$

这说明 $f(z)$是连续的。

定理 2 若连续函数序列 $f_0(z),f_1(z),f_2(z),\cdots,f_n(z),\cdots$在曲线$C$上一致收敛于函数 $f(z)$，那么

$$\lim_{n\to\infty}\int_C f_n(z)\mathrm{d}z=\int_C f(z)\mathrm{d}z,\tag{2-46}$$

其中 C 是可求长的曲线。

证明 对于任意给定的 $\varepsilon>0$，由于 $\{f_n\}$ 一致收敛于 $f(z)$，则存在自然数 N，使得当 $n\geqslant N$ 时，对 C 上一切点 z，有

$$|f_n(z)-f(z)|<\varepsilon/l,$$

其中 l 是曲线 C 的长度。对于这样的 n，我们有

$$\left|\int_C f_n(z)\mathrm{d}z-f(z)\mathrm{d}z\right|=\left|\int_C\{f_n(z)-f(z)\}\mathrm{d}z\right|<\frac{\varepsilon}{l}\cdot l=\varepsilon,$$

这说明关系式(2-46)是成立的。

现在我们讨论函数项级数的一致收敛性。如果函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(z)$的部分和序列 $S_0(z)=f_0(z)$, $S_1(z)=f_0(z)+f_1(z),\cdots,S_n(z)=f_0(z)+f_1(z)+\cdots+f_n(z),\cdots$在区域$\mathscr{D}$（曲线 C）上一致收敛于函数 $f(z)$，即对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在一个自然数 N，使得当 $n\geqslant N$ 时，不等式

$$|f(z)-S_n(z)|<\varepsilon\tag{2-47}$$

在$\mathscr{D}$（或C）上成立，则称$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$在区域$\mathscr{D}$（或曲线$C$）上一致收敛于函数$f(z)$。

若$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$在$\mathscr{D}$（或$C$）上一致收敛于$f(z)$，按定义，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在正整数$N$，使得当$n\geqslant N$时，

$$|S_n(z)-f(z)|<\varepsilon/2,$$
$$|S_{n+p}(z)-f(z)|<\varepsilon/2 \quad (p\geqslant 1)$$

在$\mathscr{D}$（或C）上成立，因此，当$n\geqslant N$，$p\geqslant 1$时

$$|S_{n+p}(z)-S_n(z)|<\varepsilon \tag{2-48}$$

在$\mathscr{D}$（或C）上成立。反之，若(2-48)式成立，那么显然级数$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$在$\mathscr{D}$（或$C$）上收敛，记其和函数为$f(z)$，现在令$p\to+\infty$，得到当$n\geqslant N$时，

$$|f(z)-S_n(z)|\leqslant\varepsilon$$

在$\mathscr{D}$（或C）上成立。所以级数$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$在区域$\mathscr{D}$（或曲线$C$）上一致收敛于函数$f(z)$。

因此，级数$\sum f_n(z)$在区域$\mathscr{D}$（或曲线C）上一致收敛的充分必要条件是：对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在自然数N，使得当$n\geqslant N$，$p\geqslant 1$时，

$$|f_{n+1}(z)+f_{n+2}(z)+\cdots+f_{n+p}(z)|<\varepsilon \tag{2-49}$$

在$\mathscr{D}$（或C）上成立。

魏尔斯特拉斯(Weistrass)M-判别法 若函数序列$\{f_n(z)\}(n=0,1,2,\cdots)$在点集$\mathscr{A}\subset\mathscr{C}$上有定义，并且$|f_n(z)|\leqslant M_n(n=0,1,2,\cdots)$，而正项级数$\sum_{n=0}^{\infty} M_n$收敛，则级数$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$在$\mathscr{A}$上一致收敛。

证明 由于对$\mathscr{A}$中一切点z，有

$$|f_{n+1}(z)+f_{n+2}(z)+\cdots+f_{n+p}(z)|$$
$$\leqslant M_{n+1}+M_{n+2}+\cdots+M_{n+p},$$

以及$\sum_{n=0}^{\infty} M_n$收敛，所以对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在自然数N，使得

当 $n\geqslant N$，$p\geqslant 1$ 时，在$\mathscr{A}$上成立着

$$|f_{n+1}(z)+\cdots+f_{n+p}(z)|$$
$$\leqslant M_n+M_{n+1}+\cdots+M_{n+p}<\varepsilon_{\circ}$$

由上述一致收敛的充要条件，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$在$\mathscr{A}$上一致收敛。

由定理 1 和定理 2 即得下列定理。

定理 3 若函数 $f_n(z)(n=0,1,2,\cdots)$ 在区域$\mathscr{D}$(或曲线 C)上连续，级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$在$\mathscr{D}$（或$C$）上一致收敛于函数 $f(z)$，则 $f(z)$在$\mathscr{D}$（或C）上连续。

定理 4 若函数 $f_n(z)(n=0,1,2,\cdots)$在可求长曲线 C 上连续，级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$在 C 上一致收敛于函数 $f(z)$，则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}\int_C f_n(z)\mathrm{d}z_{\circ} \tag{2-50}$$

(2-50)式表明$\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$在 C 上可以逐项积分。

定理 5（魏尔斯特拉斯定理） 设$\mathscr{D}$是以可求长曲线C为其边界的单连通区域，函数 $f_n(z)(n=0,1,2,\cdots)$在区域$\mathscr{D}$内解析且在闭区域$\overline{\mathscr{D}}$上连续，如果级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$在 C 上一致收敛于函数 $f(z)$，那么

(1) 这级数在$\mathscr{D}$的任何一个有界闭区域$\overline{G}$上一致收敛，其和函数 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ 在$\mathscr{D}$内解析；

(2) 由它们的 k 阶导数所组成的级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$在$\mathscr{D}$的任何一个有界闭区域$\overline{G}$上一致收敛于其和函数 $f(z)$的 k 阶导数，其中 $k=1,2,\cdots$。

证明 由于$\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$在 C 上一致收敛于 $f(z)$，所以 $f(z)$是 C 上的连续函数，并且对于任给的 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，使得当 $n\geqslant N$ 时，对于 C 上所有的点 ζ 成立着

$$|f(\zeta)-S_n(\zeta)|<\varepsilon,$$

其中 $S_n(\zeta)=\sum\limits_{m=0}^{n} f_m(\zeta)$。由于$\overline{G}\subset\mathscr{D}$，设 d 表示$\overline{G}$与 C 间的距离，则

$d>0$。于是，当 $z\in\overline{G}$，$n\geqslant N$ 时，不等式

$$\left|\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}-\frac{S_n(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}\right|<\varepsilon/d^{k+1}$$

对所有的 $z\in\overline{G}$，$\zeta\in C$ 成立，其中 $k=0,1,2,\cdots$。由于 C 是可求长的，设其长度为 l，于是，当 $n\geqslant N$ 时，不等式

$$\left|\frac{k!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^{k+1}}-\frac{k!}{2\pi i}\sum_{n=1}^{N}\int_C\frac{f_n(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^{k+1}}\right|<\frac{\varepsilon lk!}{d^{k+1}}$$

对所有的 $z\in\overline{G}$ 成立。由于 ε 的任意性，则级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k!}{2\pi i}\int_C\frac{f_n(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^{k+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}f_n^{(k)}(z) \tag{2-51}$$

在 $\overline{G}$ 上一致收敛于函数

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^{k+1}}, \tag{2-52}$$

其中，我们对(2-51)式左端中的每一项都使用了柯西公式或者各阶导数公式。特别，当 $k=0$ 时，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(z)$ 在 $\overline{G}$ 上一致收敛于其和函数 $f(z)$，并且在 $\overline{G}$ 上成立着

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)}。 \tag{2-53}$$

(2-53)式表明函数 $f(z)$ 可以由在曲线 C 上的连续函数 $f(\zeta)$ 用柯西公式来表示，所以 $f(z)$ 在区域 $\mathscr{G}$ 内解析。于是根据各阶导数公式，便得到

$$\frac{k!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^{k+1}}=f^{(k)}(z)。$$

把它代入(2-52)式，便得到定理的第二部分的结论。

2.2 泰勒级数与劳朗级数

在第一章的§3中，我们证明了任意一个收敛半径为正数的幂级数，其和函数在其收敛圆内是解析的，下面我们证明其逆定理亦真。

定理6 若函数 $f(z)$ 在圆 C：$|z-a|<R$ 内是解析的，则 $f(z)$ 在 C 内可以展开成幂级

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n。\tag{2-54}$$

其中，$a_n=f^{(n)}(a)/n!$，并且这个级数的收敛半径$\geqslant R$。

幂级数(2-54)称为$f(z)$在点$z=a$的泰勒(Taylor)级数。

证明 设z是圆C内任意一点，作圆周$\gamma:|\zeta-a|=r<R$，使得z位于γ的内部。由柯西公式，有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)}。\tag{2-55}$$

为了得到$f(z)$的幂级数展开式，我们将$\frac{1}{\zeta-z}$（称为柯西核）展成几何级数。注意到

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)}=\frac{1}{\zeta-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}},$$

且由于$\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right|=|z-a|/r<1$，利用熟知的几何级数，则有

$$\frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n。$$

于是

$$\frac{1}{\zeta-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}。$$

但是，由于$|z-a|<r$，$|\zeta-a|=r$，所以

$$\frac{|f(\zeta)|\,|z-a|^n}{|(\zeta-a)^{n+1}|}\leqslant\frac{M}{r}\left(\frac{|z-a|}{r}\right)^n,$$

其中，$M=\max\{|f(\zeta)|:|\zeta-a|=r\}$。由于$|z-a|/r<1$，所以根据魏尔斯特拉斯$M$–判别法，$\sum_{n=0}^{\infty}f(\zeta)(z-a)^n/(\zeta-a)^{n+1}$关于$\zeta$在$\gamma$上一致收敛于$f(\zeta)/(\zeta-z)$。由§2.1中的定理4，得到

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}\right]\cdot(z-a)^n。$$

设

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}, \tag{2-56}$$

根据各阶导数公式，则 $a_n = f^{(n)}(a)/n!$，这说明 a_n 与 z 和 r 都无关。所以对于 $|z-a|<R$，有

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n.$$

因为 r 是任意选取的，$r<R$，故(2-54)式在 $|z-a|<R$ 内成立。这就给出，(2-54)的收敛半径一定不小于 R。

推论 1 若函数 $f(z)$ 在区域 $\mathscr{D}$ 内解析，$a\in\mathscr{D}$，则在 $|z-a|<R$ 内，$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$，其中 $R = d(a, \partial\mathscr{D})$，即 a 到 $\mathscr{D}$ 的边界 $\partial\mathscr{D}$ 的距离。

上述推论和第一章 §3 中的定理 2 给出了解析函数的另一个特征，即在其解析的区域内的每一点，函数能展成幂级数。

推论 2 若 $f(z)$ 在区域 $\mathscr{D}$ 内解析，$a\in\mathscr{D}$，则若 $a_n = f^{(n)}(a)/n!$，我们有不等式

$$|a_n| \leqslant M/R^n, \tag{2-57}$$

其中 $M = \max\{|f(z)| : z\in\mathscr{D}\}$，$R = d(a, \partial\mathscr{D})$。

不等式(2-57)称为**柯西不等式**。

这是公式(2-56)的直接推论。

定理 7 若函数 $f(z)$ 在圆环 $\mathscr{D}: r<|z-a|<R\ (0\leqslant r<R\leqslant+\infty)$ 内解析，则

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n, \tag{2-58}$$

其中

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-a|=\rho} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} \quad (r<\rho<R). \tag{2-59}$$

并且这个展开式是唯一的，称它为劳朗(Laurent)展式，称(2-58)式右端的级数为劳朗级数。

证明 设 z 是 $\mathscr{D}$ 内任何点，在 $\mathscr{D}$ 内取两个圆周

$$\gamma_1: |z-a| = r_1, \qquad \gamma_2: |z-a| = r_2\ (r<r_1<r_2<R),$$

使得 z 在圆环 $r_1<|z-a|<r_2$ 内（图 2.15）作一割线连接 γ_1 和 γ_2，利用柯西公式，即得

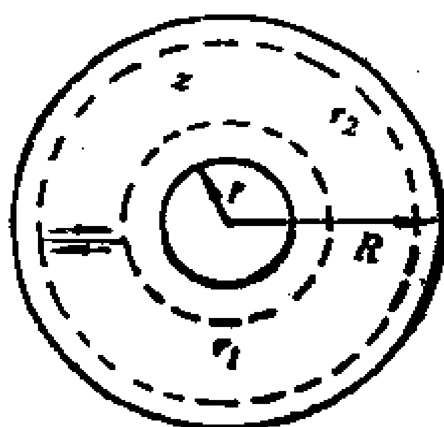


图 2.15

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{f(z)d\zeta}{\zeta-z}。\tag{2-60}$$

当 $\zeta\in\gamma_2$ 时，由于 $\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right|=\frac{|z-a|}{r_2}<1$，所以

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-a)\left(1-\frac{z-a}{\zeta-a}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}},\tag{2-61}$$

并且(2-61)式右端的级数在 γ_2 上一致收敛；由于 $|f(\zeta)|$ 在 γ_2 上有界，因而级数 $\sum f(\zeta)(z-a)^n/(\zeta-a)^{n+1}$ 关于 ζ 在 γ_2 上一致收敛于函数 $f(\zeta)/(\zeta-z)$。因此，由这一章 §2.1 中的定理 4，得到

$$f_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n,\tag{2-62}$$

其中

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}\quad(n=0,1,2,\cdots)。\tag{2-63}$$

当 $\zeta\in\gamma_1$ 时，由于 $\left|\frac{\zeta-a}{z-a}\right|=\frac{r_1}{|z-a|}<1$，所以

$$\frac{1}{\zeta-z}=-\frac{1}{(z-a)\left(1-\frac{\zeta-a}{z-a}\right)}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\zeta-a)^{n-1}}{(z-a)^n},\tag{2-64}$$

并且(2-64)式右端的级数关于 ζ 在 γ_1 上一致收敛。由于 $|f(\zeta)|$ 在 γ_1 上有界，因而，级数 $\sum f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}/(z-a)^n$ 关于 ζ 在 γ_1 上一致收敛于函数 $f(\zeta)/(\zeta-z)$。因此，我们有

$$f_2(z)=\frac{-1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}(z-a)^{-n},\tag{2-65}$$

其中
$$a_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}d\zeta。\qquad (2-66)$$

把(2-62)式和(2-65)式代入(2-60)式，则得到

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n。$$

设 $r_1<\rho<r_2$，由于函数 $f(\zeta)/(\zeta-a)^{n+1}(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 在圆环$\mathscr{D}$内解析，利用柯西定理，则

$$\oint_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}=\oint_{\gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}=\oint_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}},$$

其中 γ 是圆周 $|z-a|=\rho$。可见，(2-63)式和(2-66)式中所定义的积分与 r_1,ρ 和 r_2 等无关，它们是些常数。

由幂级数的性质可知，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ 在任何闭圆 $|z-a|\leqslant r_2(<R)$ 上是一致收敛的，负指数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-a)^{-n}$ 在任何闭圆环 $+\infty\geqslant|z-a|\geqslant r_1(>r)$ 上是一致收敛的。

现在证明唯一性。设 $f(z)$ 在$\mathscr{D}$内还可以展开成另一个劳朗级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-a)^n \qquad (r<|z-a|<R),\qquad (2-67)$$

其中级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$ 在圆 $|z-a|<R$ 内收敛，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_{-n}(z-a)^{-n}$ 在圆环 $r<|z-a|<+\infty$ 内收敛。由幂级数的性质，(2-67) 式右端的劳朗级数在圆周 $\gamma: |z-a|=\rho\ (r<\rho<R)$ 上一致收敛于 $f(z)$，因而，用 $(z-a)^{-m-1}$ 乘 (2-67) 式的右端所得到的劳朗级数在 γ 上一致收敛于 $f(z)/(z-a)^{m+1}$。因此，利用这一章 §2.1 中的定理 4，我们有

$$\oint_{\gamma}\frac{f(z)dz}{(z-a)^{m+1}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n\oint_{\gamma}(z-a)^{n-m-1}dz=2\pi i b_m,$$

因为
$$\oint_{\gamma}(z-a)^m dz=\begin{cases}2\pi i, & m=-1,\\ 0, & m\neq-1.\end{cases}$$

于是
$$b_m=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(z)dz}{(z-a)^{m+1}}=a_m\ (m=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

从而定理得证。

我们称级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$为劳朗级数(2-58)的**解析部分**，称负指数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-a)^{-n}$为劳朗级数(2-58)的**主要部分**或**奇异部分**。

利用定理6，我们就能把解析函数展开成关于某一个解析点的泰勒级数。例如$\log(1+z)$ $(-\pi<\arg(1+z)<\pi)$关于$z=0$的泰勒级数为

$$\log(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}+\cdots \quad (|z|<1), \tag{2-68}$$

函数$(1+z)^\alpha=e^{\alpha\log(1+z)}$ $(\log 1=0)$关于$z=0$的泰勒级数为

$$(1+z)^\alpha=1+\alpha z+C_2^\alpha z^2+C_3^\alpha z^3+\cdots+C_n^\alpha z^n+\cdots \quad (|z|<1), \tag{2-69}$$

其中$C_n^\alpha=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)/n!$。

有时，不须经过公式$a_n=f^{(n)}(a)/n!$去计算系数，可以利用$\frac{1}{1-z}$，e^z，$\sin z$和$\cos z$等函数的幂级数展开式。例如求$f(z)=1/(z-1)(z-2)$在$|z|<1$内关于点$a=0$的幂级数展开式。

函数$f(z)$可以分解为两个最简分式之和：

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1},$$

因为

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}},$$

而函数

$$\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

在$|z|<1$内，由于$\left|\frac{z}{2}\right|<1$，所以它是一个几何级数的和：

$$\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\cdots+\frac{z^n}{2^n}+\cdots,$$

因而

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}-\frac{z}{2^2}-\frac{z^2}{2^3}-\cdots-\frac{z^n}{2^{n+1}}-\cdots,$$

同样
$$-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots,$$

因此，把上述两个级数相加，就得

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

$$=\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{2^2}\right)z+\left(1-\frac{1}{2^3}\right)z^2+\cdots+\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n+\cdots,$$

这就是我们所要求的幂级数。

利用劳朗级数系数的一般公式(2-59)去求劳朗级数，通常计算起来是不便利的。在某些情况中可以采用较简单的方法。

要将有理函数展开成劳朗级数，只需将有理真分式表示成最简分式之和。形如$\frac{1}{z-a}$的最简分式可展开成几何级数，而形如$1/(z-a)^k$（k是大于1的整数）的分式展开成的级数可由$1/(z-a)$的几何级数微分$(k-1)$次得到。要记住，一切有理真分式都可以表示为形如$A/(z-a)^k$的分式之和，这里A和a是复数。

在将无理函数及超越函数展开成劳朗级数时，常常可以利用函数e^z，$\sin z$，$\cos z$，$\log(1+z)$的泰勒级数展开式、二项级数展开式，以及另外一些熟知的展开式。

例 2-8 求函数$f(z)=(z^2-2z+5)/[(z-2)(z^2+1)]$分别在$1<|z|<2$与$2<|z|<+\infty$的劳朗展开式。

解
$$f(z)=\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}=\frac{1}{z-2}-\frac{2}{z^2+1}。$$

当$1<|z|<2$时

$$f(z)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{2}{z^2}\cdot\frac{4}{1+\frac{1}{z^2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n-\frac{2}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{z^2}\right)^n,$$

$$f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n}}\quad(1<|z|<2)。$$

当 $2<|z|<+\infty$ 时

$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{2}{z^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n}},$$

所以

$$f(z)=\sum_{m=1}^{\infty}a_{-m}z^{-m},$$

其中

$$a_{-m}=\begin{cases}2^{2n}, & m=2n+1,\\ 2^{2n-1}+2(-1)^n, & m=2n。\end{cases}$$

例 2-9 求在点 $z=1$ 的邻域将函数 $\sin\frac{z}{z-1}$ 展成劳朗级数。

解 我们有

$$\sin\frac{z}{z-1}=\sin\left(1+\frac{1}{z-1}\right)=\sin 1\cdot\cos\frac{1}{z-1}+\cos 1\cdot\sin\frac{1}{z-1},$$

由于

$$\sin z=\frac{z}{1!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\cdots,$$

我们便得

$$\sin\frac{1}{z-1}=\sin 1+\frac{\cos 1}{z-1}-\frac{\sin 1}{2!(z-1)^2}-\frac{\cos 1}{3!(z-1)^3}+\cdots+$$

$$+(-1)^n\frac{\sin 1}{(2n)!(z-1)^{2n}}+(-1)^n\frac{\cos 1}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}$$

$$+\cdots。$$

2.3 零点与奇点

若函数 $f(z)$ 在区域 $\mathscr{D}$ 内解析，我们已经看到，在 $\mathscr{D}$ 内任何一点 $z=$

a，它能展开成关于点 a 的泰勒级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n。$$

若 $a_0=a_1=\cdots=a_{m-1}=0$，$a_m\neq 0$，则在泰勒展开式中其首项是 $a_m(z-a)^m$，在这种情况下，我们称 $f(z)$ 在点 $z=a$ 有 **m 阶零点**。

如果函数 $f(z)$ 在点 $z=a$ 不是解析的，则称 $z=a$ 是 $f(z)$ 的**奇点**。又若 $f(z)$ 在某一个圆环 $0<|z-a|<\rho$ 内是解析的，则称 $z=a$ 是 $f(z)$ 的**孤立奇点**。

如果函数 $f(z)$ 在区域 $\mathscr{D}$ 内除去点 $z=a$ 之外是解析的，那么，我们能在 $\mathscr{D}$ 内作两个以 a 为中心的同心圆，较小圆的半径 ρ_1 可以任意地小，较大圆的半径 ρ_2 只要小于 $d=d(a,\partial\mathscr{D})$ 都可以了。在圆环 $0<\rho_1<|z-a|<\rho_2(<d)$ 中，$f(z)$ 有下述形式的劳朗展开式：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n(z-a)^{-n}。\tag{2-70}$$

若 $b_m\neq 0$，但 $b_{m+1}=b_{m+2}=\cdots=0$，在这种情况下，$f(z)$ 在 $z=a$ 的主要部分由有限多项所组成：

$$\frac{b_1}{z-a}+\frac{b_2}{(z-a)^2}+\cdots+\frac{b_m}{(z-a)^m},$$

我们称奇点 $z=a$ 为 $f(z)$ 的 **m 阶极点**，称系数 b_1 为 $f(z)$ 在极点 $z=a$ 的**留数**，它可能是零。若 $z=a$ 是一阶极点，则 $b_1=\lim\limits_{z\to a}\{(z-a)f(z)\}$。

如果 $b_1=b_2=\cdots=0$，则称 $z=a$ 为 $f(z)$ 的**可去奇点**。

如果 $f(z)$ 的主要部分是无穷级数，则称 $z=a$ 为 $f(z)$ 的**本性孤立奇点**。

定理 8 若 $z=a$ 是 $f(z)$ 的 m 阶零点，则 $z=a$ 是 $f(z)$ 的孤立零点，即存在 $z=a$ 的一个邻域，在这个邻域中除 $z=a$ 之外，$f(z)$ 再没有其它零点。

证明 显然，我们能把 $f(z)$ 写成 $f(z)=(z-a)^m\varphi(z)$，其中 $\varphi(z)$ 在 $|z-a|<\rho$ 内是解析的，并且 $\varphi(a)\neq 0$，因为 $\varphi(a)=a_m$。记 $\varphi(a)=2c$，那么由于 $\varphi(z)$ 是连续的，则存在一个区域 $|z-a|<\delta$，使得在此区域中 $|\varphi(z)-\varphi(a)|<|c|$。因此，当 $|z-a|<\delta$ 时

$$|\varphi(z)|\geqslant|\{|\varphi(a)|-|\varphi(z)-\varphi(a)|\}|>|c|,$$

所以 $\varphi(z)$ 在 $|z-a|<\delta$ 中不为零。

定理 9（唯一性定理） 如果函数 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 在区域$\mathscr{D}$内都是解析的，并且在向区域$\mathscr{D}$的一个内点 a 收敛的点列 a_n 上，这两个函数的值相等，那么在区域$\mathscr{D}$内 $f_1(z)\equiv f_2(z)$。

证明 考虑函数 $f(z)=f_1(z)-f_2(z)$，这函数在区域$\mathscr{D}$内是解析的，并且那些点 a_n 都是它的零点。由此可见，$f(z)$ 必定在点 a 的某一个邻域内恒等于零，因为 $f(a)=0$，而 a 不是 $f(z)$ 的孤立零点。但这时 $f(z)$ 在点 a 邻域内的泰勒级数的所有系数必都为零，因此 $f(z)$ 在以 a 为中心、以 a 到$\mathscr{D}$的边界的距离为半径的圆内恒等于零。

设 p 是区域$\mathscr{D}$内的任意一点，用在$\mathscr{D}$内的连续曲线 γ 连接 a 与 p。设 d 是 γ 上的点到$\mathscr{D}$的边界的最短距离。在 γ 上取点 $z_0=a, z_1, \cdots,$

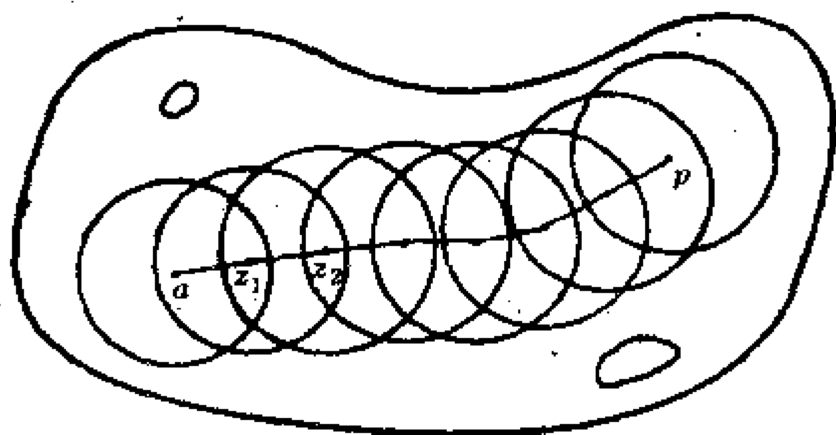


图 2.16

$z_n=p$，使得相邻两点间的距离 $<\rho<d$，以这 $n+1$ 个点为中心，以 ρ 为半径作圆 $C_0, C_1, \cdots, C_n$，显然这些圆都位于$\mathscr{D}$内，并且后一个圆心必在前一个圆内（图 2.16）。

我们已经证明在圆 C_0 内 $f(z)\equiv 0$，因为 z_1 在 C_0 内，因而在 z_1 的某个充分小的邻域内 $f(z)\equiv 0$，因此，$f(z)$ 在点 z_1 的泰勒级数的所有系数都为零，故在 $|z-z_1|<d$ 内因而在 C_1 内 $f(z)\equiv 0$。因点 z_2 在 C_1 内，所以在 C_2 内 $f(z)\equiv 0$。……如此继续下去，最后得到 $f(p)=0$。但是，p 是$\mathscr{D}$内的任意一点，故 f 在$\mathscr{D}$内恒等于零，即在$\mathscr{D}$内 $f_1(z)\equiv$

$f_2(z)$。定理证毕。

唯一性定理表明，在区域$\mathscr{D}$内解析且不恒为零的函数不可能在收敛到$\mathscr{D}$内某一个点的点列上为零，也不可能在属于$\mathscr{D}$的曲线或子域上为零。但是，函数的零点可以有属于$\mathscr{D}$的边界点的极限点。

下面我们来讨论三种孤立奇点的性质。

定理 10 点a是$f(z)$的可去奇点的充要条件是$\lim\limits_{z\to a}f(z)$存在极限（有限的）。

证明 若a是$f(z)$的可去奇点，据定义，则在$0<|z-a|<\rho_2$内，有

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n,$$

显然$\lim\limits_{z\to a}f(z)=a_0$。反之，若$\lim\limits_{z\to a}f(z)$存在，则存在$\delta>0$和正数$M$，使得当$0<|z-a|<\delta<\rho_2$时。$|f(z)|\leqslant M$。由(2-66)式得到

$$|b_n|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho<\delta}f(z)(z-a)^{n-1}dz\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{2\pi}M\rho^{n-1}\cdot2\pi\rho=M\rho^n\quad(n=1,2,\cdots)。$$

令$\rho\to0$，得到$b_n=0$ $(n=1,2,\cdots)$，故$z=a$是f的可去奇点。

值得注意的，从上面的证明可以看出，要使点$z=a$是$f(z)$的可去奇点，只要求$f(z)$在孤立奇点a的邻域内有界。实际上，我们证明了下述定理。

定理 10' 点a是$f(z)$的可去奇点的充要条件是$f(z)$在孤立奇点的邻域内有界。

定理 11 点a是$f(z)$的一个极点，即$f(z)$在点a的劳朗级数(2-70)中的主要部分只含有有限多项：

$$f(z)=\frac{b_m}{(z-a)^m}+\cdots+\frac{b_1}{z-a}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n,\ b_m\neq0,\ m\geqslant1,\tag{2-71}$$

的充要条件是$\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$。

证明 若$z=a$是$f(z)$的某一m阶极点，即(2-70)式成立，则

$$f(z)=(z-a)^{-m}\{b_m+b_{m-1}(z-a)+\cdots+b_1(z-a)^{m-1}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^{n+m}\},$$

并且由于 $b_m\neq0$，我们能把 $f(z)$ 写成 $f(z)=(z-a)^{-m}\psi(z)$，其中 $\psi(z)$ 在 $z=a$ 的某个邻域中解析，$\psi(a)=b_m\neq0$。因此，如定理 8 中所证明的，存在点 a 的一个邻域 $|z-a|<\delta$，使得在这个邻域中 $|\psi(z)|>\frac{1}{2}|b_m|$，由此即得

$$|f(z)|>\frac{1}{2}|b_m||z-a|^{-m}。$$

故当 $z\to a$ 时，$|f(z)|\to+\infty$，即 $\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$。

反之，若 $\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$，则函数 $g(z)=1/f(z)$ 在 $z=a$ 处有一个零点，比如是某个 m 级零点。于是，在 $z=a$ 的一个邻域内，它可以表示成 $g(z)=(z-a)^m\varphi(z)$，其中 $\varphi(z)$ 在那个邻域内是解析的，并且 $\varphi(a)\neq0$。这样，在这个邻域内，有

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)^m}\cdot\frac{1}{\varphi(z)}。\qquad(2\text{-}72)$$

但是，函数 $1/\varphi(z)$ 在点 a 的某个邻域内解析，因此，在那个邻域内可以展开成泰勒级数：

$$\frac{1}{\varphi(z)}=b_m+b_{m-1}(z-a)+\cdots+b_1(z-a)^{m-1}$$
$$+c_0(z-a)^m+c_1(z-a)^{m+1}+\cdots,$$

其中 $b_m=1/\varphi(a)\neq0$。把它代入 $f(z)$ 的表示式(2-72)，便得到(2-71)式。定理证毕。

定理 12 点 a 是 $f(z)$ 的本性孤立奇点的充要条件是 $\lim\limits_{z\to a}f(z)$ 不存在。

证明 由定理 10 和定理 11 可立即证得这定理。

例如，$f(z)=e^{1/z}$，$z=0$ 是 $f(z)$ 的本性奇点，因为

$$\lim_{z=x\to+0}e^{1/z}=+\infty,\qquad\lim_{z=x\to-0}e^{1/z}=0,$$

所以 $\lim\limits_{z\to 0} e^{1/z}$ 不存在。$f(z)$在点 $z=0$ 的邻域内的劳朗展开式为

$$e^{1/z}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots+\frac{1}{n!z^n}+\cdots \quad (z\neq 0)。$$

在将函数作泰勒展开时，要注意级数的收敛区域。若函数 $f(z)$ 在复平面$\mathscr{C}$上除去有限多个孤立奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_m \cdots$ 之外是解析的，则在任何指定的点 $z=a$，我们能将 $f(z)$展开成泰勒级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$，并且这个级数的收敛半径 ρ 将是 $z=a$ 到 $f(z)$ 的最近奇点的距离，因为 $f(z)$在$|z-a|<\rho$ 内显然是解析的，它不可能在以 a 为中心，超过 ρ 为半径的圆内解析。

上面我们讨论了有限孤立奇点的分类以及各自的充要条件，现在我们来讨论函数在无穷远点邻域内的性质。

若函数 $f(z)$在区域$\mathscr{D}$：$R<|z|<\infty (R>0)$ 内解析，则称 $z=\infty$ 为 $f(z)$的一个孤立奇点。上面所规定的奇点的定义，可以不加任何改变地推广到这种函数上来：我们按照极限 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ 是有限的、无限的、或根本不存在的，而说 $z=\infty$是 $f(z)$ 的可去奇点、极点、或本性奇点。

但是，与之相关的劳朗展开式的特征，这时却改变了。这可以从下面的推理中看到。我们令 $z=\frac{1}{\zeta}$，又

$$f(z)=f\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\varphi(\zeta),$$

于是，$\zeta=0$ 是函数 $\varphi(\zeta)$的孤立奇点，其关于点 $\zeta=0$ 的劳朗展开式为

$$\varphi(s)=\sum_{n=0}^{\infty} a_{-n}\zeta^n+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\zeta^{-n},$$

于是可知，$f(z)$关于无穷远点 $z=\infty$ 的劳朗展开式为

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n+\sum_{n=0}^{\infty} a_{-n}z^{-n}。 \qquad (2\text{-}73)$$

这时，正指数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 是劳朗级数（2-7）式的主要部分，而级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{-n}z^{-n}$ 是劳朗级数(2-7)式的解析部分。

因此，由上述定理 10—12，便有

定理 13 无穷远点是 $f(z)$ 的一个可去奇点，当且仅当 $f(z)$ 在无穷远点邻域内的劳朗展开式中完全不含 z 的正次幂项；无穷远点是 $f(z)$ 的一个极点，当且仅当在其劳朗展开式中含有有限多项 z 的正次幂项；无穷远点是 $f(z)$ 的一个本性奇点，当且仅当在其劳朗展开式中含有无限多项 z 的正次幂项。

如果 $f(z)$ 在点 $z=\infty$ 处有一个可去奇点，通常就说 $f(z)$ 在无穷远点是解析的，并且取 $f(\infty)=\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$。这时，显然函数 $f(z)$ 在无穷远点的某个邻域内是有界的。

根据奇点的特征，可以区分出下述简单的两类单值解析函数：

一、整函数

如以前所说，如果函数 $f(z)$ 在复平面 $\mathscr{C}$ 上完全没有奇点，即在 $\mathscr{C}$ 上是解析的，则称 $f(z)$ 是**整函数**。根据这一章 §2.2 中的定理 6，每一个整函数在 $\mathscr{C}$ 上都可用一幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 来表示，且其收敛半径是 $+\infty$。反之亦然。一切多项式、指数函数、$\sin z$、$\cos z$ 等，都是整函数的例子。显然，整函数的和、差与积，都仍然是整函数。

二、亚纯函数

如果函数 $f(z)$ 在 $\mathscr{C}$ 上除了极点以外再没有别的奇点，则称 $f(z)$ 是一个**亚纯函数或分式函数**。从这个定义可以得出：在任何一个有界区域内，一个亚纯函数只可能有有限多个极点；不然的话，就要有一个非孤立奇点，这是不可能的。但在整个 $\mathscr{C}$ 上，可以有无穷多个极点。一切整函数、有理函数、三角函数等都是亚纯函数。显然，两个亚纯函数的和、差、积与商，以及亚纯函数的有理函数 $R(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 等都仍然是亚纯函数。

关于有理函数，我们有下述定理。

定理 14 若单值函数 $f(z)$ 在无穷远点和在复平面 $\mathscr{C}$ 的有限部分上没有本性奇点，则 $f(z)$ 是一有理函数。

证明 因为无穷远点不是 $f(z)$ 的本性奇点，所以存在无穷远点的某个邻域 $R<|z|<\infty$，在这个邻域内，$f(z)$ 在无穷远点的主要部

分是

$$B_1z+B_2z^2+\cdots+B_kz^k$$

的形式。在圆$|z|<R+\varepsilon$内，$\varepsilon>0$，$f(z)$ 最多只能有有限多个极点，比如$a_1,a_2,\cdots,a_n$。$f(z)$在$z=a_j$处的主要部分可能写成

$$\frac{b_{1j}}{z-a_j}+\frac{b_{2j}}{(z-a_j)^2}+\cdots+\frac{b_{mj}}{(z-a_j)^{m_j}},$$

假定 a_j是m_j阶极点，m_j与a_j有关，$j=1,2,\cdots,n$。现在，我们考虑函数

$$\varphi(z)=f(z)-\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{b_{1j}}{z-a_j}+\frac{b_{2j}}{(z-a_j)^2}+\cdots+\frac{b_{mj}}{(z-a_j)^{m_j}}\right\}$$
$$-(B_1z+\cdots+B_kz^k)。$$

函数$\varphi(z)$在闭复平面$\overline{\mathscr{C}}$上是解析的，所以$\varphi(z)$对一切z是有界的。于是，据柳微尔定理，$\varphi(z)$是常数。因此

$$f(z)=C+\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{b_{1j}}{z-a_j}+\cdots+\frac{b_{mj}}{(z-a_j)^{m_j}}\right\}+B_1z+\cdots+B_kz^k。$$

2.4 解析延拓

假设函数$f_1(z)$和$f_2(z)$分别在区域$\mathscr{D}_1$和$\mathscr{D}_2$上是解析的，又$\mathscr{D}_1$和$\mathscr{D}_2$有一公共部分，在这公共部分上$f_1(z)=f_2(z)$，则函数

$$\varphi(z)=\begin{cases}f_1(z), & z\in\mathscr{D}_1,\\ f_2(z), & z\in\mathscr{D}_2\end{cases}$$

在区域$\mathscr{D}_1+\mathscr{D}_2$上是解析的。函数$f_2(z)$可以看成是$f_1(z)$的开拓，并称函数$f_2(z)$是函数$f_1(z)$的**解析延拓**或**直接解析延拓**。

解析延拓的标准方法是幂级数方法，现在我们将简洁地加以描述。

设P是点z_0，在它的某个邻域内，$f(z)$是解析的。根据这一章§2.2中的定理6，它能展开成关于$z-z_0$的幂级数：

$$p(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,\quad a_n=f^{(n)}(z_0)/n!。$$

如果S是$f(z)$的最靠近P的奇点，则这个泰勒级数$p(z)$在以P为中

心、以 PS 为半径的圆内是有效的。现在，我们在这收敛圆 C 内任取一点 P_1，它不位于线段 PS 上，则幂级数

$$p_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(1)}(z-p_1)^n,\quad a_n^{(1)}=f^{(n)}(p_1)/n!$$

在 P_1 的某个圆域内定义了一个解析函数。这个圆一直可以扩大到离 P_1 最近的、这个新幂级数所确定的函数 $p_1(z)$ 的奇点，这奇点可能是 S，也可能不是 S。在这两种情况下，这新的收敛圆 C_1 可能部分地位于旧收敛圆 C 的外部，在区域 C_1-C 内，这新的幂级数 $p_1(z)$ 能用于定义 $f(z)$ 的值，显然原来的幂级数 $p(z)$ 在这里是失效的。

类似地，在 $p_1(z)$ 的收敛圆 C_1 中，我们任取另外一点 P_2，则泰勒级数

$$p_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(2)}(z-p_2)^n,\quad a_n^{(2)}=p_1^{(n)}(p_2)/n!$$

又有一个以 P_2 为中心的收敛圆 C_2，在一般情况下，C_2 有可能部分地位于 C_1 的外部，因而，又能进一步扩大函数 $f(z)$ 的定义域，……如此继续下去。

借助这个延拓过程，从任何一个幂级数出发，我们能找到任何多个其它幂级数，它和它们定义了函数 $f(z)$ 从点 P 出发、不经过函数的奇点所能延拓到的一切点的函数值。我们还能够证明：如果 $f(z)$ 在闭曲线 $PQRQ'P$ 的内部没有奇点，则沿两条不同路径 PQR，$PQ'R$ 的解析延拓给出的最终的幂级数相同。

现在，追随魏尔斯特拉斯，我们能将 z 的一个解析函数定义成一个幂级数与从它出发经解析延拓所能导得的其它一切幂级数的集合。于是，由两个不同的解析式子所表示的幂级数，彼此能从另一个经解析延拓而导得。用这种方法所定义的完全解析函数不必一定是单值函数，延拓所得的每个幂级数称为解析函数的元素。

若 $f(z)$ 不是一个整函数，那么存在某些例外点，它们不位于 $f(z)$ 经解析延拓能达到的任何区域内。这些点是解析函数的奇点。显然，单值函数的奇点也是在这种较广意义下的奇点。

在幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ 的收敛圆周 C_0 上，至少存在解析函数的

一个奇点。因为不然的话，利用解析延拓，我们能构造一个解析函数，它在 C_0 的内部等于 $f(z)$，但它在较大的同心圆 Γ_0 内是解析的。于是上述泰勒级数应在 Γ_0 内处处收敛，但这是不可能的，因为这个级数的收敛圆是 C_0。若 z_1 是 C_0 内任何一点，令 C_1 是幂级数

$$\sum_0^{\infty} f^{(n)}(z_1)\frac{(z-z_1)^n}{n!}$$

的收敛圆。若 Q_1 是以 z_1 为中心、内切于 C_0 的圆，则这个新的幂级数在 Q_1 内肯定是收敛的，并且在那里有和函数 $f(z)$。由于 C_1 的半径不可能小于 Q_1 的半径，于是有三种可能性：(1) C_1 有比 Q_1 较大的半径；(2) C_0 是自然边界，即 C_0 上几乎所有的点都是原来那个幂级数的奇点；(3) C_1 能内切于 C_0，虽然 C_0 不是 $f(z)$的自然边界。

在情况(1)下，C_1 部分地位于 C_0 的外部，并且新的幂级数提供了 $f(z)$的一个解析延拓：于是我们能在 C_1 内与 C_0 内取一点 z_2，并重复这个过程。在情况(2)下，我们不能把 $f(z)$延拓到 C_0 的外部，而且不论在 C_0 内怎样选取 z_1，收敛圆 C_1 总是内切于 C_0。在情况(3)下，C_0 和 C_1 的接触点是原来的幂级数经解析延拓所得到的解析函数的一个奇点。这是因为在 C_1 上必定有一个奇点，而且这个奇点不可能位于 C_0 之内。

我们能用一些例子阐明上面的某些论述。

例如，级数

$$\frac{1}{a}+\frac{z}{a^2}+\frac{z^2}{a^3}+\frac{z^3}{a^4}+\cdots$$

只在其收敛圆 $|z|<|a|$ 内表示函数 $f(z)=1/(a-z)$。若 b/a 不是实数，即点 b 不在原点与点 a 的连接线上，则对于不同的 b 值，级数

$$\frac{1}{a-b}+\frac{z-b}{(a-b)^2}+\frac{(z-b)^2}{(a-b)^3}+\cdots$$

在圆域 $|z-b|<|a-b|$ 内表示函数 $f(z)$。

又例如，函数

$$f(z)=1+z^2+z^4+z^6+\cdots+z^{2n}+\cdots$$

在单位圆 $|z|<1$ 内是收敛的。函数 $f(z)$ 在点 $z=1$ 处有一个奇点，

例如，当 $z=x$ 时，$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\infty$。事实上，$\lim\limits_{x\to 1}\sum\limits_{k=1}^{n+1} x^{2^k}=n+1$，所以，对于任何一个 n，总可以找到一个 $\delta>0$，使得当 $x>1-\delta$ 时有 $\sum\limits_{k=1}^{n+1} x^{2^k}>n$，因之，就更有 $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^{2^k}>n$。并且我们还有

$$f(z)=z^2+\sum_{k=1}^{\infty}(z^2)^{2^k}=z^2+f(z^2),$$

由此可见，在点 $z=\sqrt{1}$ 处（即 $z=\pm1$ 处）也有奇点。同样，对于任何一个自然数 n，我们有

$$f(z)=z^2+z^4+\cdots+z^{2^n}+f(z^{2^n}),$$

因此，在 $z=\sqrt[2^n]{1}$ 的 2^n 个点处，函数 $f(z)$ 也有奇点。这样，函数 $f(z)$ 的奇点集合在单位圆周 $|z|=1$ 上是处处稠密的，故单位圆周 $|z|=1$ 是 $f(z)$ 的**自然边界**，$f(z)$确实不能经过这圆周的任何一段弧进行解析延拓。

在这种情况下，这个函数本身就是完全解析函数。

下面，我们介绍解析延拓的其它方法，即连续延拓原理和对称原理。

定理 15 设 $\mathscr{D}_1$，$\mathscr{D}_2$ 是两个没有公共点的区域，在它们的边界上有一段可求长的曲线 γ 是公共的(不包括端点在内)。若函数 $f_1(z)$，$f_2(z)$分别在 $\mathscr{D}_1$，$\mathscr{D}_2$ 内解析，在 $\mathscr{D}_1\cup\gamma$ 和 $\mathscr{D}_2\cup\gamma$ 上连续，并且在 γ 上，$f_1(z)=f_2(z)$，，则函数

$$f(z)=\begin{cases} f_1(z), & z\in\mathscr{D}_1, \\ f_1(z)=f_2(z), & z\in\gamma, \\ f_2(z), & z\in\mathscr{D}_2 \end{cases} \tag{2-73}$$

在区域 $\mathscr{D}_1\cup\gamma\cup\mathscr{D}_2$ 内解析。$f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 称为越过边界 γ 的**互为直接解析延拓**。这个定理称为潘雷微(Painlevé)定理。

证明 根据假设，函数 $f(z)$ 在区域 $\mathscr{D}=\mathscr{D}_1\cup\gamma\cup\mathscr{D}_2$ 内是连续的；根据莫雷拉定理，我们只要证明：它沿着$\mathscr{D}$内任何一条若当闭曲线 C'的积分等于零。如果 C'全部在区域 $\mathscr{D}_1$ 或$\mathscr{D}_2$ 之内，那么这就是柯西定理的直接推论。如果 C'属于 $\mathscr{D}_1$ 与 $\mathscr{D}_2$，那么，把路线 C' 在$\mathscr{D}_1$内的部分与在 $\mathscr{D}_2$ 内的部分分别记作为 C_1 与 C_2，把曲线 γ 在 C' 内的

那部分记作C(图 2.17)，根据柯西定理（这一章§2.1 中推广形式的定理 3)，我们便有

$$\int_{C_1+C} f(z)\mathrm{d}z=0,$$

$$\int_{C_2+C^-} f(z)\mathrm{d}z=0。$$

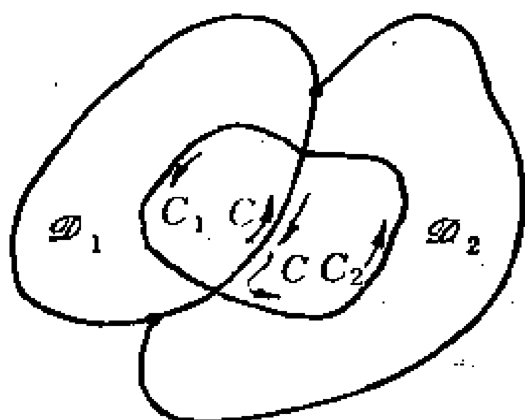


图 2.17

把这两个等式加起来，我们便得到

$$\int_{C_1+C} f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_2+C^-} f(z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_{C} f(z)\mathrm{d}z=0。$$

定理证毕。

这个定理告诉我们：如果解析函数 $f_2(z)$是解析函数 $f_1(z)$ 经过曲线 γ 的连续延拓，那么它必定是 $f_1(z)$的解析延拓。

当 γ 是一条直线段时，应用上述定理，便得下述对称原理。

定理 16 设区域$\mathscr{D}$位于实轴的同一侧，其边界包含实轴上的线段 γ（两个端点不包括在内）。若函数 $f(z)$ 在$\mathscr{D}$内解析，在$\mathscr{D}\cup\gamma$上连续，且 $f(z)$在 γ 上取实值，则函数

$$F(z)=\begin{cases}f(z), & z\in\mathscr{D}\cup\gamma,\\ \overline{f(\bar{z})}, & z\in\mathscr{D}^*\end{cases} \tag{2-74}$$

在区域 $\mathscr{D}\cup\gamma\cup\mathscr{D}^*$ 内解析，其中 $\mathscr{D}^*$ 是 $\mathscr{D}$ 关于实轴对称的区域（图 2.18)。

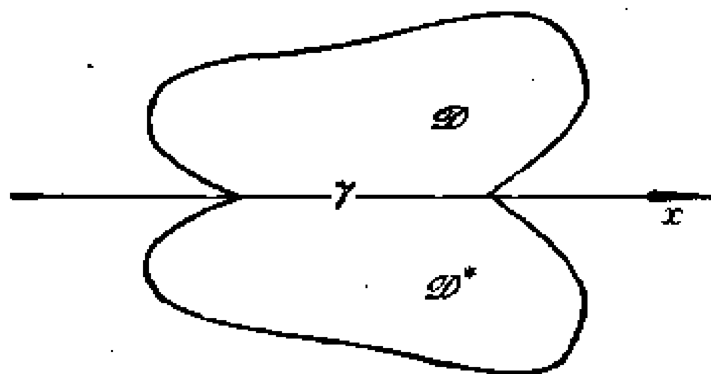


图 2.18

证明 我们首先证明：$F(z)$在$\mathscr{D}^*$内解析。设 $z_0\in\mathscr{D}^*$，z 是 z_0 邻域内的一点，由于

$$\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}=\frac{\overline{f(\bar{z})}-\overline{f(\bar{z}_0)}}{z-z_0}=\overline{\left(\frac{F(\bar{z})-F(\bar{z}_0)}{\bar{z}-\bar{z}_0}\right)},$$

所以

$$\lim_{z\to z_0}\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}=\overline{(f'(\bar{z}_0))},$$

故 $F(z)$在 $\mathscr{D}^*$ 内是解析的。又由于 $f(z)$ 在 $\mathscr{D}\cup\gamma$ 上是连续的，并且 $f(z)$在 γ 上取实值，即 $\overline{f(x_0)}=f(x_0)$，$x_0\in\gamma$，所以当 $z\in\mathscr{D}^*$ 且当 $z\to x_0$ 时，我们有

$$\lim_{z\to x_0,\,z\in D^*}F(z)=\lim_{z\to x_0}\overline{f(\bar{z})}=\overline{\lim_{\bar{z}\to x_0}f(\bar{z})}$$
$$=\overline{f(x_0)}=f(x_0)。$$

故 $F(z)$在 $\mathscr{D}^*\cup\gamma$ 上连续。根据定理 15，$F(z)$ 在 $\mathscr{D}\cup\gamma\cup\mathscr{D}^*$ 内是解析的。定理证毕。

利用上述连续延拓原理，我们能构造多值函数 $w=\sqrt[n]{z}$ 和 $w=\log z$ 的黎曼曲面。

在第一章的 §3.5 中，我们讨论过 $w=\sqrt[n]{z}$ 的单值连续分支

$$w_k=|z|^{1/n}\left(\cos\frac{\arg z+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\arg z+2k\pi}{n}\right)$$
$$=|z|^{\frac{1}{n}}e^{i(\arg z+2k\pi)/n},\ (k=0,1,2,\cdots,n-1),$$

其中，$-\pi<\arg z<\pi$。若令区域

$\mathscr{D}_k=\{z\in\mathscr{C}:\ (2k-1)\pi<\arg' z<(2k+1)\pi\}\quad(k=0,1,2,\cdots,n-1)$，

其中 $\arg' z$ 表示 z 的另一指定的幅角，则区域 $\mathscr{D}_k$ 与$\mathscr{D}_{k+1}$ 有一公共边界 γ_k:$\arg' z=(2k+1)\pi$，$k=0,1,\cdots,n-2$。函数 $w_k(z)$，$w_{k+1}(z)$ 分别在$\mathscr{D}_k\cup\gamma_k$，$\mathscr{D}_{k+1}\cup\gamma_k$ 上连续，根据连续延拓原理，函数 $w_k(z)$ 和 $w_{k+1}(z)$越过 γ_k 为互为直接解析延拓($k=0, 1, \cdots, n-2$)。若把区域 $\mathscr{D}_0$ 的边界 $\arg z=-\pi$ 与 $\mathscr{D}_{n-1}$ 的边界 $\arg' z=(2n-1)\pi$ 看成是同一的（或合一的），记作 γ_{n-1}，则 $w_0(z)$ 与 $w_{n-1}(z)$ 分别在 $\mathscr{D}_0\cup\gamma_{n-1}$，$\mathscr{D}_{n-1}\cup\gamma_{n-1}$ 上是连续的。于是，$w_0(z)$，$w_{n-1}(z)$ 越过公共边界 γ_{n-1} 是互为直接解析延拓的。

现在，我们把 $\mathscr{D}_0$ 和 $\mathscr{D}_1$ 沿 γ_0 粘起来，$\mathscr{D}_1$ 和 $\mathscr{D}_2$ 沿 γ_1 粘起来，

…，$\mathscr{D}_{n-2}$和$\mathscr{D}_{n-1}$沿γ_{n-2}粘起来，$\mathscr{D}_{n-1}$和$\mathscr{D}_0$沿γ_{n-1}粘起来（实际上，这当然是不可能的，只是我们设想将这两边上具有相同坐标的点看作是同一（或合一）的罢了）。这样我们就得到粘起来的封闭的n叶“曲面”（图2.19）。这个“曲面”R称为多值函数$w=\sqrt[n]{z}$的黎曼曲面（注意$\sqrt[n]{z}$的支点$z=0$和$z=\infty$不在曲面上）。函数

$$F(z)=\begin{cases} w_0(z), & z\in\gamma_{n-1}\cup\mathscr{D}_0\cup\gamma_0,\\ w_1(z), & z\in\gamma_0\cup\mathscr{D}_1\cup\gamma_1,\\ w_2(z), & z\in\gamma_1\cup\mathscr{D}_2\cup\gamma_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ w_{n-2}(z), & z\in\gamma_{n-3}\cup\mathscr{D}_{n-2}\cup\gamma_{n-2},\\ w_{n-1}(z), & z\in\gamma_{n-2}\cup\mathscr{D}_{n-1}\cup\gamma_{n-1} \end{cases}$$

在$\mathscr{R}$上是单值解析的，而在$\mathscr{R}$的每一叶上定义了多值函数$\sqrt[n]{z}$的一个单值解析分支。

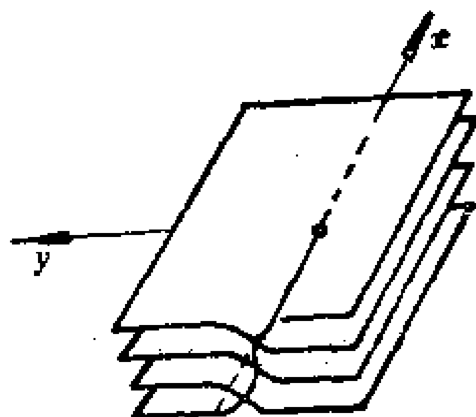


图 2.19

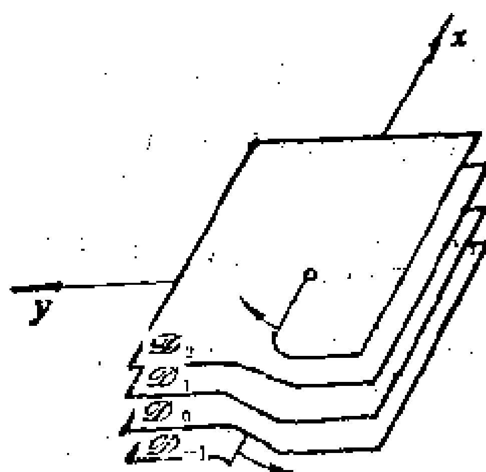


图 2.20

类似地，我们来讨论对数函数$w=\text{Log}z$的黎曼曲面。

在第一章的§3.5中，我们已将多值函数$w=\text{Log}z$分成可列无穷多个单值连续分支：

$$w_k(z)=\log|z|+i(\arg z+2k\pi)\quad(k=0,\pm1,+2,\cdots),$$

其中$-\pi<\arg z<\pi$。设$\mathscr{D}_k,\gamma_k$如前所定义$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，显然函数$w_k(z)$，$w_{k+1}(z)$分别在$\mathscr{D}_k\cup\gamma_k$，$\gamma_k\cup\mathscr{D}_{k+1}$上连续，而在$\mathscr{D}_k$，

$\mathscr{D}_{k+1}$ 上解析，因此，函数 $w_{k+1}(z)$ 是 $w_k(z)$ 越过 γ_k 的直接解析延拓 $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$。于是，若将区域 $\mathscr{D}_k$ 与 $\mathscr{D}_{k+1}$ 沿 γ_k 粘起来，$(k=\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots)$，我们就得到 $w=\text{Log}z$ 的黎曼曲面 $\mathscr{R}$（图2.20）。这里所不同的是，$\text{Log}z$ 的黎曼曲面 $\mathscr{R}$ 是无穷多叶的。支点 $z=0$ 和 $z=\infty$ 不在 $\mathscr{R}$ 上。在 $\mathscr{R}$ 上，函数

$$F(z)=\begin{cases} \cdots\cdots \\ w_1(z), & z\in\gamma_0\cup\mathscr{D}_1\cup\gamma_1, \\ w_0(z), & z\in\gamma_{-1}\cup\mathscr{D}_0\cup\gamma_0, \\ w_{-1}(z), & z\in\gamma_{-2}\cup\mathscr{D}_{-1}\cup\gamma_{-1}, \\ \cdots\cdots \end{cases}$$

是单值解析的，在 $\mathscr{R}$ 的每一叶上定义了一个单值解析分支。

习 题

1. 证明下列级数在其指定的区域上是绝对收敛的：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{nz}$， $\text{Re}z<0$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(z-1)^n}$， $|z-1|>1$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!}$， $|z|<\infty$。

2. 用魏尔斯特拉斯 M-判别法证明下列级数在其指定的区域上是一致收敛的：

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n e^{in\pi x}}{n!}$， $|z|\leqslant 1$，（提示：参考数 e 的无穷级数）；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-z)^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{n!}$， $|z|\leqslant 1$，（参看（1）的提示）；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{\left(n+\dfrac{1}{n}\right)}$， $|z|\leqslant 0.99$，（提示：对适当的 z 值应用公式 2-68）；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n-\dfrac{1}{n}\right)z^{n-1}$， $|z|\leqslant 0.99$，（提示：利用 $\dfrac{1}{(1-z)^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}$，

$|z|<r, r<1$)。

3．求下列函数在点 $z=0$ 的泰勒展开式：

(1) $z/(z^2-4z+13)$；　　(2) $\sin^2 z$；

(3) $\log(z^2-3z+2)$；　　(4) $\operatorname{arctg} z$(主值)

(5) $\frac{1}{2}\left(\log\frac{1}{1-z}\right)^2$；　　(6) $\sin\frac{1}{1-z}$（至第四项）。

4．求 $\log z$ 在点 $z=\mathrm{i}$ 处的泰勒展开式。

5．求下列函数在点 $z=1$ 处的泰勒展开式：

(1) $\sqrt{z}$　($\sqrt{1}=1$)；　　(2) $\sin(2z-z^2)$；

(3) $z/(z^2-2z+5)$；　　(4) $z^2/(z+1)^2$。

6．利用级数的逐项求导数方法，证明：

(1) $$\frac{1}{z^3}=1-\frac{3\cdot 2}{2}(z-1)+\frac{4\cdot 3}{2}(z-1)^2-\frac{5\cdot 4}{2}(z-1)^3+\cdots,$$

$$|z-1|<1;$$

(2) 利用 $\frac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}z^{n-1}$，$|z|<1$，和重复求导法，证明：对 $N>0$，有

$$\frac{1}{(1-z)^N}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n,\qquad c_n=\frac{(N-1+n)!}{n!(N-1)!},\quad |z|<1.$$

7．(1) 证明：

$$\frac{1}{1+z^2}=1-z^2+z^4-z^6+\cdots,\quad |z|<1;$$

(2) 利用上述级数及逐项求积分法，证明：

$$\operatorname{tg}^{-1}z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)},\quad |z|<1.$$

8．(1) 利用对几何级数逐项求导的方法，求在 $|z|<1$ 内级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2z^n$ 的和函数；

(2) 利用(1)的结果，计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2/2^n$ 之值。

9．利用部分分式方法，求下列函数在指定点的泰勒展开式，并指出每个展开式的有效区域：

(1) $z/[(z+1)(z-1)]$，关于 $z=0$；

(2) $z/[(z+1)(z-1)]$，关于 $z=3$；

(3) $1/(1-z)^2$，关于 $z=-1$；

(4) $1/(1-z)^3$，关于 $z=-1$；

(5) $1/[(z-3)^2 z]$，关于 $z=1$；

(6) $1/[(z-2)z]$，关于 $z=i$；

(7) $1/[(z)(z-2)(z-3)]$，关于 $z=-1$。

10. 将 $1/[(1-z)^2(1+z)^2]$ 展开成关于原点的幂级数：

(1) 利用两幂级数相乘的方法；

(2) 利用部分分式分解和 $(1\pm z)^{-1}$ 及 $(1\pm z)^{-2}$ 的级数展开式。

11. 将 $(z^3+4z^2+2z-6)/(z^2+5z+6)$ 展开成关于 $z=-1$ 的泰勒级数（提示：将上述函数改写成

$$(z-1)+\frac{z}{(z+3)(z+2)}=(z+1)-2+\frac{z}{(z+3)(z+2)},$$

再利用部分分式分解方法）。

12. 将下列函数在指定的区域内展开为劳朗级数：

(1) $1/[z^2(z-i)]$，$0<|z-i|<1$；

(2) $1/[(z-1)(z-2)]$，$0<|z-2|<1$，$0<|z-1|<1$，
$1<|z|<2$，$2<|z|<+\infty$；

(3) $(z^2-1)/[(z+2)(z+3)]$，$2<|z|<3$，$3<|z|<+\infty$；

(4) $\log((z-a)/(z-b))$，$\max(|a|,|b|)<|z|<+\infty$；

(5) $e^{1/(1-z)}$，$1<|z|<+\infty$（前四项）；

(6) $z^2 e^{1/z}$，$0<|z|<+\infty$；

(7) $\sin(z/(1-z))$，$0<|z-1|<+\infty$；

(8) $\cos z/(z-2)^2$，$0<|z-2|<+\infty$。

13. 下列函数是否可以在指定点的邻域内展开成劳朗级数：

(1) $\cos\dfrac{1}{z}$，$z=\infty$；　(2) $\operatorname{tg} z$，$z=\infty$；

(3) $\log[(z-1)(z-2)]$，$z=\infty$；　(4) $z^2/\sin(1/3)$，$z=0$；

(5) $\log\dfrac{1}{z-1}$，$z=\infty$；　(6) $\sqrt[3]{(z-1)(z-2)(z+3)}$，$z=\infty$；

(7) $\sqrt{z/[(z-2)(z+1)]}$，$z=\infty$。

14. 下列函数有哪类奇点，若是极点，求出其级，并指出函数在 ∞ 点的性质：

(1) $1/(1+e^z)$；　(2) $e^{-z}\sin(1/(1-z))$；

(3) $1/[\sin z-\cos z]$；　(4) $e^{1/(1-z)}/(e^z-1)$；

(5) $1/\sin\left(\frac{1}{z}\right)$； (6) $1/(e^z-1)-1/z$；

(7) $\operatorname{tg} z$。

15．在原点解析且满足下列条件的函数 $f(z)$ 存在吗？

(1) $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{n}{n+1}$；

(2) $f\left(\frac{1}{2n}\right)=0$, $f\left(\frac{1}{2n-1}\right)=1$；

(3) $f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}$；

(4) $f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^3}$。

16．证明：若整函数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ 在实轴上取实值，则 a_n 是实数 $(n=0,1,2,\cdots)$。

17．证明：如果整函数 $f(z)$ 在实轴上取实值，在虚轴上取虚值，则 $f(z)$ 是奇函数。

18．试作出儒科夫斯基函数的反函数 $w=z+\sqrt{z^2-1}$ 的黎曼曲面。

第三章　留数定理及其应用

§1　留数定理、幅角原理和儒歇定理

1.1 留数定理

在这里我们首先要介绍一个对以后的应用极其重要的概念——函数的留数这一概念。

设函数 $f(z)$ 在 $0<|z-a|<\delta$ 内解析，a 是 $f(z)$ 的孤立奇点。设 γ 是以 a为圆心的某一个充分小的圆周 $|z-a|=\rho$, 则数

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)dz \tag{3-1}$$

叫做 $f(z)$ 在奇点 a 处的留数，记作 $\mathrm{Res}f(a)$。根据二连区域的柯西定理，当 ρ 充分小时，留数的值与 ρ 无关。

由劳朗级数的系数公式 (2-59)，可以直接知道

$$\mathrm{Res}\, f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(z)dz=a_{-1}。 \tag{3-2}$$

即函数 $f(z)$在奇点 a 处的留数，等于 $f(z)$在 a 的邻域内的劳朗展开式中 -1 次幂项的系数。

由此便得出，在可去奇点处函数的留数总是等于零。若 $z=a$ 是 $f(z)$的 n 阶极点，则

$$\mathrm{Res}f(a)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\{(z-a)^n f(z)\}。 \tag{3-3}$$

事实上，由于 $z=a$ 是 $f(z)$的 n 阶极点，则

$$f(z)=\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-a}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n,$$

所以，只要对上述等式乘以$(z-a)^n$, 把所得的等式微分 $n-1$ 次，然后令 $z\to a$, 取极限便得到公式 (3-3)。

若点a是一阶极点，则公式(3-3)就变得特别简单，为

$$\operatorname{Res} f(a)=\lim_{z\to a}\{(z-a)f(z)\}。\tag{3-4}$$

如果在点a的邻域内，函数$f(z)$表示成两个在点a处解析的函数之商：

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

并且$\varphi(a)\neq 0$，而$\psi(z)$在点a处有一阶零点（这时$f(z)$在a处有一阶极点），则公式(3-4)就成为

$$\operatorname{Res} f(a)=\lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}}=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}。\tag{3-5}$$

例 3-1 试求$f(z)=z/(z^2+1)$的所有留数。

解 $z=\mathrm{i}, -\mathrm{i}$是$f(z)$的一阶极点，根据公式(3-4)，便得

$$\operatorname{Res} f(\mathrm{i})=\lim_{z\to \mathrm{i}}(z-\mathrm{i})f(z)=\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{Res} f(-\mathrm{i})=\lim_{z\to -\mathrm{i}}(z+\mathrm{i})f(z)=\frac{1}{2}。$$

例 3-2 试求$f(z)=\operatorname{ctg} z$在点$z=0$的留数。

解 由公式(3-4)，有

$$\operatorname{Res} f(0)=\lim_{z\to 0} z\operatorname{ctg} z=\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z}\cdot\cos z=1。$$

例 3-3 试求$f(z)=1/z^3(z-2\mathrm{i})$在点$z=0$的留数。

解 $z=0$是$f(z)$的三阶极点，根据公式(3-3)，则

$$\begin{aligned}\operatorname{Res} f(0)&=\lim_{z\to 0}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\{z^3 f(z)\}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}(z-2\mathrm{i})^{-1}\\&=\lim_{z\to 0}(z-2\mathrm{i})^{-3}=-\mathrm{i}/8。\end{aligned}$$

例 3-4 试求函数

$$f(z)=\frac{\operatorname{sh} b\sqrt{z}}{\operatorname{sh} a\sqrt{z}}e^{zt}$$

的所有极点的留数。

解 由于 $\text{sh}z=-\text{i}\sin\text{i}z$，所以 $f(z)$ 可以改写成

$$f(z)=\frac{\sin\text{i}b\sqrt{z}}{z\sin\text{i}a\sqrt{z}}e^{zt}。$$

我们知道，分母 $z\sin\text{i}\,a\sqrt{z}$ 的零点为

$$z_n=-n^2\pi^2/a^2\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

它们都是一级零点，因此，它们是 $f(z)$ 的一级极点。根据公式(3-4)，则得

$$\text{Res}f(0)=\lim_{z\to 0}\frac{\sin\text{i}b\sqrt{z}}{\sin\text{i}a\sqrt{z}}e^{zt}=\lim_{z\to 0}\frac{\text{i}b\sqrt{z}-\dfrac{(\text{i}b\sqrt{z})^3}{3!}+\cdots}{\text{i}a\sqrt{z}-\dfrac{(\text{i}a\sqrt{z})^3}{3!}+\cdots}$$

$$=b/a,$$

$$\text{Res}f(z_n)=\lim_{z\to z_n}\frac{e^{zt}\sin\text{i}b\sqrt{z}}{z(\sin\text{i}a\sqrt{z})'}=\lim_{z\to z_n}\frac{2e^{zt}\sin\text{i}b\sqrt{z}}{a\text{i}\sqrt{z}\cos\text{i}a\sqrt{z}}$$

$$=2(-1)^n\frac{\sin bn\pi/a}{n\pi}e^{-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2t}\quad(n=1,2,\cdots)。$$

若 $z=\infty$ 是函数 $f(z)$ 的孤立奇点，即 $f(z)$ 在圆环 $R<|z|<+\infty$ 内是解析的，我们定义 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的留数为

$$\text{Res}f(\infty)=-\frac{1}{2\pi\text{i}}\oint_{|z|=\rho}f(z)\text{d}z,\tag{3-6}$$

其中 $R<\rho<+\infty$。当 ρ 充分大时，留数的值与 ρ 无关，由于 $f(z)$ 在点 $z=\infty$ 的邻域内可展开成劳朗级数，即

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nz^n,\tag{3-7}$$

其中

$$a_n=\frac{1}{2\pi\text{i}}\oint_{|z|=\rho}\frac{f(z)\text{d}z}{z^{n+1}},\tag{3-8}$$

所以

$$\text{Res}f(\infty)=-\frac{1}{2\pi\text{i}}\oint_{|z|=\rho}f(z)\text{d}z=-a_{-1}。\tag{3-9}$$

即 $f(z)$ 在孤立奇点 $z=\infty$ 处的留数等于 $f(z)$ 在点 $z=\infty$ 的邻域内劳朗级数中 -1 次幂项的系数乘以 -1。

下面我们来讨论留数的基本定理。

定理 1 设 γ 是一条可求长的若当闭曲线。若函数 $f(z)$ 在由 γ 所围成的内部区域 $\mathscr{D}$ 内除去 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 这些点之外，是处处解析的，并且 $f(z)$ 在闭区域 $\overline{\mathscr{D}}$ 上除去 $a_1, a_2, \cdots a_n$ 外是连续的，则

$$\oint_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}f(a_k)。\tag{3-10}$$

证明 在 $\mathscr{D}$ 内以 $a_k(k=1,2,\cdots,n)$ 为中心作充分小的圆周 γ_k，使得这些圆彼此不相交，根据多连区域的柯西定理，我们有

$$\oint_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n}\oint_{\gamma_k} f(z)\mathrm{d}z。$$

但是，按照留数的定义，有

$$\oint_{\gamma_k} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}f(a_k)。$$

故 (3-10) 式成立。

由上述证明可以看出，若 $\mathscr{D}$ 是多连区域，其边界 γ 是由有限多条可求长的若当闭曲线所组成，又若 $f(z)$ 仍满足定理 1 的条件，则公式 (3-10) 仍然成立，其积分方向关于区域 $\mathscr{D}$ 是正向。

定理 2 若函数 $f(z)$ 在复平面 $\mathscr{C}$ 上除去点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 处是解析的，则 $f(z)$ 在所有孤立奇点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 及 $z=\infty$ 处的留数之和等于零，即

$$\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}f(a_k) + \mathrm{Res}f(\infty) = 0。\tag{3-11}$$

证明 以原点为中心，以充分大的 R 为半径作圆周 γ，使得孤立奇点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 包含在 γ 的内部，于是，由定理 1，有

$$\oint_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}f(a_k)。$$

但是

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z = -\mathrm{Res}f(\infty),$$

所以

$$\mathrm{Res}f(\infty)=-\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}f(a_k)。\tag{3-12}$$

故(3-11)式成立。

我们往往可以利用公式(3-12)来求函数在无穷远点的留数，但有时这并不是最方便的。

例 3-5 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}e^{imz}$，$m\neq 0$ 是实常数。计算 $f(z)$ 在其奇点处的留数。

解 $z=\pm i$ 是 $f(z)$ 的一阶极点，$z=\infty$ 是 $f(z)$ 的本性奇点。根据公式(3-4)，

$$\mathrm{Res}f(i)=\lim_{z\to i}\{(z-i)f(z)\}=e^{-m}/2i=-ie^{-m}/2,$$

$$\mathrm{Res}f(-i)=\lim_{z\to -i}\{(z+i)f(z)\}=ie^{m}/2,$$

因此，由公式(3-12)，便得到

$$\mathrm{Res}f(\infty)=-\mathrm{Res}f(i)-\mathrm{Res}f(-i)=-i\,\mathrm{sh}\,m。$$

例 3-6 $f(z)=(z^2-1)^2/z^2(z-\alpha)(z-\beta)$，其中 $\alpha\beta=1,\alpha\neq\beta$。计算 $f(z)$ 在其奇点处的留数。

解 α,β 是 $f(z)$ 的一阶极点，$z=0$ 是 $f(z)$ 的 2 阶极点，$f(z)$ 在 $z=\infty$ 是解析的。

$$\mathrm{Res}f(\alpha)=\lim_{z\to\alpha}\{(z-\alpha)f(z)\}=\frac{(\alpha^2-1)^2}{\alpha^2(\alpha-\beta)}=\alpha-\beta,$$

$$\mathrm{Res}f(\beta)=\lim_{z\to\beta}\{(z-\beta)f(z)\}=\frac{(\beta^2-1)^2}{\beta^2(\beta-\alpha)}=\beta-\alpha。$$

为了求出 $f(z)$ 在 $z=0$ 的留数，我们只要求 $(z^2-1)^2/(z-\alpha)(z-\beta)$ 在 $z=0$ 的泰勒级数展开式中 z 项的系数。由于

$$\frac{(z^2-1)^2}{(z-\alpha)(z-\beta)}=\frac{(z^2-1)^2}{\alpha\beta}\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)^{-1}\left(1-\frac{z}{\beta}\right)^{-1}$$

$$=(z^2-1)^2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\beta}\right)^n$$

$$=(z^2-1)^2\left(1+\frac{z}{\alpha}+\frac{z}{\beta}+\cdots\right)$$

$$=(z^2-1)^2\{1+(\alpha+\beta)z+\cdots\},$$

所以 $\operatorname{Res}f(0)=\alpha+\beta$。于是，由公式(3-12)便得到

$$\operatorname{Res}f(\infty)=-\{\operatorname{Res}f(\alpha)+\operatorname{Res}f(\beta)+\operatorname{Res}f(0)\}$$
$$=-(\alpha+\beta)。$$

其实，为了求 $\operatorname{Res}f(\infty)$，根据公式 (3-9)，只要求出 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 邻域内劳朗级数展开式中 z^{-1} 项的系数并乘以 -1 即得。由于

$$\frac{(z^2-1)^2}{z^2(z-\alpha)(z-\beta)}=\left(1-\frac{1}{z^2}\right)^2\left(1-\frac{\alpha}{z}\right)^{-1}\left(1-\frac{\beta}{z}\right)^{-1}$$
$$=\left(1-\frac{1}{z^2}\right)^2\left(1+\frac{\alpha}{z}+\frac{\alpha^2}{z^2}+\cdots\right)\left(1+\frac{\beta}{z}+\frac{\beta^2}{z^2}+\cdots\right)$$
$$=1+\frac{\alpha+\beta}{z}+\cdots,$$

故 $\operatorname{Res}f(\infty)=-(\alpha+\beta)$。由此可见，在这个例中，利用公式(3-9)式来求 $\operatorname{Res}f(\infty)$，可能还较方便些。

1.2 幅角原理及儒歇定理

定理3 设区域 $\mathscr{D}$ 的边界 C 是一条可求长的若当闭曲线。若函数 $f(z)$在闭区域 $\overline{\mathscr{D}}$ 内除了有限多个极点以外是解析的，$f(z)$ 在 C 上不等于零，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(z)dz}{f(z)}=N-P, \tag{3-13}$$

其中 N 和 P 分别表示 $f(z)$在 C 内零点的个数与 C 内极点的个数（它们都是按重数计算的）。

证明 假设 $z=a$ 是一个 n 阶零点，则在这一点的充分小邻域内 $f(z)$可以表示成：

$$f(z)=(z-a)^n\varphi(z),$$

其中 $\varphi(z)$在此邻域内是解析的，并且 $\varphi(z)\neq0$。因此，在此邻域内，有

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{n}{z-a}+\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}。 \tag{3-14}$$

由于最后一项在 $z=a$ 的充分小邻域内是解析的，所以 $z=a$ 是 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 的一个一阶极点，其留数为 n。类似地，若 $z=b$ 是 $f(z)$ 的一个 p 阶极点，则在 $z=b$ 的充分小邻域内，有

$$f(z)=(z-b)^{-p}\psi(z),$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{-p}{z-b}+\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}, \tag{3-15}$$

其中 $\psi(z)$ 在此邻域内是解析的，并且 $\psi(z)\neq 0$，所以，$z=b$ 是 $f'(z)/f(z)$ 的一个一阶极点，其留数是 $-p$。

设 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 是 $f(z)$ 在 C 内的所有零点，n_j 是零点 a_j 的阶数，$b_1, b_2, \cdots, b_s$ 是 $f(z)$ 在 C 内的所有极点，p_j 是极点 b_j 的阶数，于是，对函数 $f'(z)/f(z)$ 应用留数定理，便得

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{j=1}^{r}n_j-\sum_{j=1}^{s}p_j=N-P.$$

这就是我们所要证明的。定理证毕。

现在我们来说明 (3-13) 式左端的几何意义。我们有

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f'(z)dz}{f(z)}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C d\log|f(z)|+\frac{1}{2\pi}\oint_C d\arg f(z), \tag{3-16}$$

其中 log 与 arg 表示这两个数的某一个沿着 C 连续的分支。

设闭曲线 C 在 $w=f(z)$ 映照下的像曲线为 Γ。因为当 z 在闭曲线 C 上走一圈时，函数 $\log|f(z)|$ 仍回到它出发时的原先的值，所以，(3-16)式右端中的第一个积分等于零。另一方面，当 z 沿 C 绕行一周时，点 $w=f(z)$ 在 Γ 上绕行一周，原点 $w=0$ 可能包含在曲线 Γ 的内部，因而 $\arg f(z)$ 的最后值就可能与其原始值不同（图 3.1），于是 (3-16) 式右端中的第二个积分就可能不等于零。值

$$\frac{1}{2\pi}\oint_C d\arg f(z)=\frac{1}{2\pi}\Delta_C\arg f(z)$$

是函数 $f(z)$ 的幅角在沿 C 绕行一周时的全部改变量除以 2π，这个值称为像曲线 Γ 关于坐标原点的**回转次数**，因此，由(3-16)式便得到

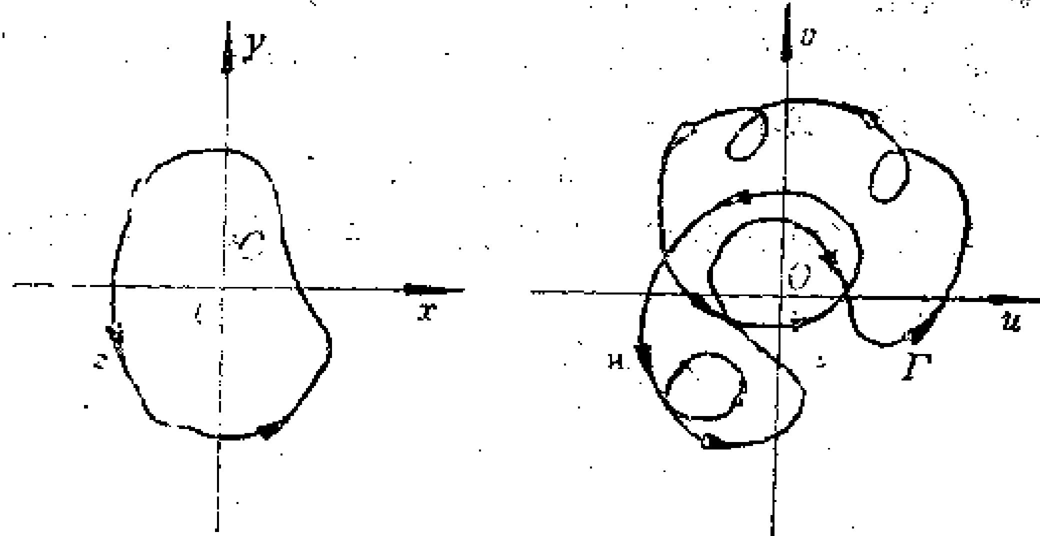


图 3.1

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)\mathrm{d}z}{f(z)}=\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z)。\tag{3-17}$$

联立关系式(3-13)和(3-17)，便得到

$$N-P=\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z。\tag{3-18}$$

这结果被称为**幅角原理**。

由上述定理的证明过程，容易证明下述幅角原理的推广，其证明留给读者。

定理 4 设区域 $\mathscr{D}$ 的边界 C 是可求长的若当闭曲线。若函数 $f(z)$ 在闭区域 $\overline{\mathscr{D}}$ 上除去 $\mathscr{D}$ 内的极点 $b_1, b_2, \cdots, b_r$（它们不是按重数计算的）之外是解析的，$f(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 内具有零点 $a_1, a_2, \cdots, a_s$（不按重数计算），$f(z)$ 在 C 上不等于零，又函数 $\varphi(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 内解析，并在 $\overline{\mathscr{D}}$ 上连续，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\varphi(z)\mathrm{d}z=\sum_{j=1}^{s} n_j\varphi(a_j)-\sum_{j=1}^{r} p_j\varphi(b_j),\tag{3-19}$$

其中 n_j 是零点 a_j 的重数，p_j 是极点 b_j 的阶数。

定理 5（儒歇 Rouché 定理） 若函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在闭围道 C 的内部及其上是解析的，又若在 C 上 $|f(z)|>|g(z)|$，则函数 $f(z)$ 与 $f(z)+g(z)$ 在 C 内有同样多的零点个数。

证明 因在 C 上 $|g(z)|<|f(z)|$，所以，$f(z)$和$f(z)+g(z)$ 在 C 上都没有零点。设 N 和 N' 分别表示函数 $f(z)$和 $f(z)+g(z)$在 C 内的零点的个数（按重数计算），由定理 3，则得

$$2\pi N=\Delta_C\arg f(z),$$

$$2\pi N'=\Delta_C\arg(f(z)+g(z))=\Delta_C\arg f(z)+\Delta_C\arg[1+g(z)/f(z)]。$$

因此，我们只要证明

$$\Delta_C\arg\left(1+\frac{g}{f}\right)=0。$$

由于在 C 上有 $|g(z)|<|f(z)|$，所以，在 C 上有

$$\mathrm{Re}[1+g(z)/f(z)]\geqslant 1-|g(z)/f(z)|>0。$$

这说明 $w(z)=1+g(z)/f(z)$位于右半平面，因此，当 z 在 C 上绕行一周时，$\arg(1+g/f)$仍旧回到原来的值，故$\Delta_C\arg(1+g/f)=0$。

1.3 儒歇定理的应用例子

下面我们来介绍几个应用儒歇定理的一些典型例子。

一、代数基本定理的另证

代数基本定理 设 $p(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$，则 $p(z)$在复平面上恰有 n 个零点。

证明 令 $f(z)=z^n$，$g(z)=a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$，并且令

$$\rho=2\max_{1\leqslant k\leqslant n}|a_k|^{1/k},$$

则

$$|a_k|\leqslant\left(\frac{\rho}{2}\right)^k,\quad k=1,2,\cdots,n,$$

并且在圆周 $|z|=\rho$ 成立

$$|g(z)|\leqslant\rho^n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\rho^n,$$

其中 $\rho^n=|z|^n=|f(z)|$，这说明 在$|z|=\rho$ 上$|g(z)|<|f(z)|$。由儒歇定理，则函数 $f(z)+g(z)=p(z)$与 $f(z)$ 在$|z|=\rho$ 内有同样多的零点个数，而后者有 n 个零点（实际上是有一个 n 阶零点），故$p(z)$恰有 n 个零点。定理证毕。

二、多项式的零点关于其系数的连续性

设 $z_1, z_2, \cdots, z_k$ 是多项式

$$p(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$$

的零点，又设 m_i 是 z_i 的重数，$\rho=\min\limits_{i\neq j}|z_i-z_j|>0$。

定理 6 对每个 ε，$0<\varepsilon<\rho$，存在 $\delta>0$，使得任何多项式

$$q(z)=z^n+b_1z^{n-1}+\cdots+b_n$$

在每个圆内

$$|z-z_i|<\varepsilon, \quad i=1,2,\cdots,k$$

恰有 m_i 个零点，只要它的系数满足 $|b_j-a_j|<\delta$，$j=1,2,\cdots,n$。

证明 令 $f(z)=p(z)$，$g(z)=q(z)-p(z)$，Γ_i 表示圆周 $|z-z_i|=\varepsilon$，由于

$$f(z)=(z-z_1)^{m_1}\cdots(z-z_j)^{m_j}\cdots(z-z_k)^{m_k},$$

$$g(z)=(b_1-a_1)z^{n-1}+(b_2-a_2)z^{n-2}+\cdots+(b_n-a_n),$$

因而，在 Γ_i 上，我们有

$$|f(z)|\geqslant\varepsilon^{m_i}(\rho-\varepsilon)^{n-m_i},$$

$$|g(z)|\leqslant\delta\mu_i, \qquad \mu_i=\sum_{j=0}^{n-1}(|z_i|+\varepsilon)^j。$$

因此，若

$$\delta<\mu_i^{-1}\varepsilon^{m_i}(\rho-\varepsilon)^{n-m_i}, \qquad i=1,2,\cdots,k,$$

则在每个圆周 Γ_i 上，$|f(z)|>|g(z)|$。据儒歇定理，则函数 $f=p$ 与 $f+g=p+(q-p)=q$ 在每个 Γ_i 内有相同的零点个数，即为 m_i。定理证毕。

这样，我们已经证明了：多项式的零点是其系数的连续函数。这里要提醒读者是，在这连续性的数值计算方面，必须注意定理的条件是否满足。例如 $p(z)=z^{10}$，$q(z)=z^{10}-\varepsilon$，只要一个系数改变 10^{-10}，则其所有的零点将改变 10^{-1}。这是由于 $p(z)$ 只有一个 10 阶零点所引起的。更惊奇的是下述例子。设

$$p(z)=\prod_{k=1}^{20}(z-k)=\sum_{k=0}^{20}a_kz^k。$$

精心的计算表明，多项式 $q(z)=p(z)-2^{-23}z^{19}$ 有五对共轭复根，其虚部介于从 ±0.64 到 ±2.81 之间。这是因为 $|b_{19}-a_{19}|=2^{-23}>2^{-38}>\delta$。

三、反馈放大器的尼奎斯特准则

反馈放大器的尼奎斯特(Nyquist)准则 设多项式

$$f(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$$

在虚轴上没有零点，l_R 表示虚轴上从 $\mathrm{i}R$ 到 $-\mathrm{i}R$ 的线段，若

$$\lim_{R\to+\infty}\Delta_{l_R}\arg f(z)=-n\pi, \tag{3-20}$$

则多项式 $f(z)$ 的零点全部位于左半平面 $\mathrm{Re}z<0$ 内。

证明 设 C_R 表示位于右半平面上的半圆周：$|z|=R$，$\mathrm{Re}z>0$。令 $\Gamma_R=C_R+l_R$，其方向关于右半圆是正的（图 3.2）。根据幅角原理，设 $f(z)$ 在 Γ_R 内的零点个数为 N_R，则

$$N_R=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\Gamma_R}\arg f(z)。$$

但是，由于

$$\Delta_{C_R}\arg f(z)=\Delta_{C_R}\arg z^n\left(1+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\cdots+\frac{a_n}{z^n}\right)$$

$$=\Delta_{C_R}\arg z^n+\Delta_{C_R}\arg\left(1+\frac{a_1}{z}+\cdots+\frac{a_n}{z^n}\right),$$

$$\lim_{R\to+\infty}\left(1+\frac{a_1}{z}+\cdots+\frac{a_n}{z_n^n}\right)=1,$$

所以

$$\lim_{R\to+\infty}\Delta_{C_R}\arg f(z)=n\pi,$$

因此

$$\lim_{R\to+\infty}N_R=\lim_{R\to+\infty}\Delta_{C_R}\arg f(z)+\lim_{R\to+\infty}\Delta_{l_R}\arg f(z)=0。$$

这说明多项式 $f(z)$ 在右半平面上没有零点，又因在虚轴上 $f(z)$ 也没有零点，故多项式 $f(z)$ 的根（零点）全部位于左半平面 $\mathrm{Re}z<0$。

例 3-7 阐明多项式

$$f(z)=z^6+z^5+6z^4+5z^3+8z^2+4z+1$$

的根全部位于左半平面 $\mathrm{Re}z<0$ 上。

解 事实上，在 $w=f(z)$ 的映照下，虚轴 $z=\mathrm{i}y$(y 从 $+\infty$ 到 $-\infty$) 的像为

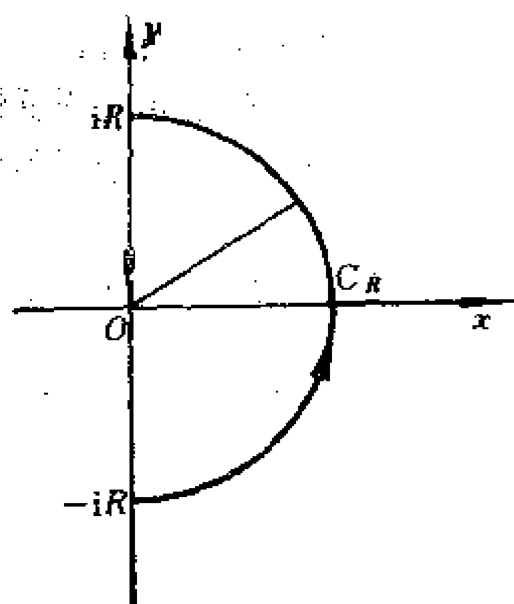


图 3.2

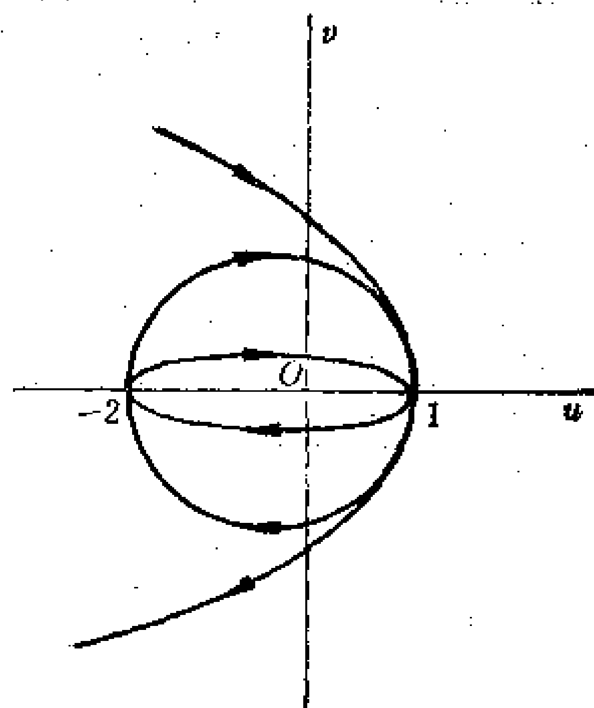


图 3.3

$$u+\mathrm{i}v=(\mathrm{i}y)^6+(\mathrm{i}y)^5+6(\mathrm{i}y)^4+5(\mathrm{i}y)^3+8(\mathrm{i}y)^2+4(\mathrm{i}y)+1,$$

因此

$$u=-y^6+6y^4-8y^2+1,$$

$$v=y^5-5y^3+4y。$$

当 y 充分大时，$u<0$，$v>0$，

并且

$$\lim_{y\to\infty}\frac{v}{u}=0。$$

函数 $v=y(y^4-5y^2+4)$ 的零点是：

$y_1=0, y_{2,3}=\pm1, y_{4,5}=\pm2$。

我们计算其对应的 u 值是：

$u(0)=1,\quad u(\pm1)=-2,\quad u(\pm2)=1$。

再考虑到 $u=u(y)$ 是 y 的偶函数，而 $v=v(y)$ 是 y 的奇函数，则可以绘出虚轴的像的草图($f(z)$的尼奎斯特图，见（图 3.3)），这虽然是很粗糙的图形，但对于计算 $\Delta_{l_R}\arg f(z)$ 来说是足够的了。

虚轴的像按负方向环绕坐标原点 $w=0$ 三圈，所以

$$\lim_{R\to\infty}\Delta_{l_R}\arg f(z)=-6\pi。$$

根据上述判别准则，可见上述多项式的根全部位于左半面内。

尼奎斯特图在数学上直观易懂，它已成为人们理解和克服反馈失稳现象的得力工具，在美国这一方法的应用已普及到每一个工程师。

四、解析函数序列之极限函数的零点

设函数 $f_n(z)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 在区域 $\mathscr{D}$ 内是解析的，又设序列 $\{f_n(z)\}$在 $\mathscr{D}$ 内的每一个闭子集上一致收敛。由第二章 §2.1 中的魏尔斯特拉斯定理，我们已经知道其极限函数$f(z)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 内是解析的，关于它的零点，我们有下述定理。

定理 7 设 Γ 是 $\mathscr{D}$ 内任何一条若当闭曲线，它的内部也位于 $\mathscr{D}$ 内，又设对于 $z\in\Gamma, f(z)\neq 0$，则对一切充分大的 n，函数 $f_n(z)$ 在 Γ 的内部与 f 有相同的零点个数。

证明 由于 $f(z)$在 Γ 上是连续的且不等于零，则

$$\varepsilon=\inf_{z\in\Gamma}|f(z)|>0。$$

由于$\{f_n(z)\}$在 Γ 上一致收敛，则存在 N，使得对 $z\in\Gamma, n>N$，有

$$|f_n(z)-f(z)|<\varepsilon。$$

令 $g(z)=f_n(z)-f(z)$，由儒歇定理即得到定理的结论。

推论 1 若极限函数 $f(z)$不恒等于零，则 $f(z)$ 的每个零点是函数 $f_n(z)$的零点的极限。

证明 设 z_0 是 $f(z)$的零点，又设在闭圆 $|z-z_0|\leqslant\rho_0$ 内不含有 $f(z)$的其它零点。设 $\rho_k=2^{-k}\rho_0$，根据定理 7，对每个 $k, k=0,1,2,\cdots$，存在自然数 N_k，使得对 $n>N_k$，函数 $f_n(z)$在圆 $|z-z_0|<\rho_k$ 内恰有一个零点 $z_{n,k}$。我们能假设 N_k 是严格单调增加的。若令

$$z_n=z_{n,k},\quad N_k<n\leqslant N_{k+1},\quad k=0,1,2,\cdots,$$

显然，序列$\{z_n\}$收敛于 z_0。

推论 2 (霍尔维茨 Hurwitz 定理) 设函数 $f_n(z)$, $n=0,1,2,\cdots$, 在区域 $\mathscr{D}$ 内解析，并且异于零，又设序列$\{f_n(z)\}$在 $\mathscr{D}$ 的每个闭子集上一致收敛于其极限函数 $f(z)$，则 $f(z)$在区域 $\mathscr{D}$ 内或者恒等于

零，或者异于零。

证明 若极限函数 $f(z)$ 有一个零点，但不恒等于零，则根据上述推论1，z_0 必定是函数 $f_n(z)$ 的零点的极限，这是不可能的，因为函数 $f_n(z)$ 没有零点。定理证毕。

五、确定方程 $z^8-5z^5-2z+1=0$ 在单位圆内根的个数

设 $f(z)=-5z^5$，$g(z)=z^8-2z+1$。显然，在单位圆周上，$|g(z)|\leqslant 4<5=|f(z)|$。根据儒歇定理，函数 $f(z)+g(z)=z^8-5z^5-2z+1$ 与 $f(z)=-5z^5$ 在单位圆内有相同个数的零点，而后者在单位圆内有一个五阶零点，故 z^8-5z^5-2z+1 在单位圆内有五个零点。

习　　题

1．用留数方法计算下述积分：

(1) $\oint_{|z+1|=1}\dfrac{dz}{(1+z)(z-2)}$；　(2) $\oint_{|z|=3}\dfrac{dz}{(z+1)(z-2)}$。

2．用留数方法计算下列积分，并用关于奇点的劳朗展开式以求得留数：

(1) $\oint_{|z-2|=1}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(z-1)^{n-2}(n+1)!}dz$；

(2) $\oint_{|z|=2} ze^{1/z}dz$；

(3) $\oint_{|z-2|=1} ze^{1/z}dz$；　(4) $\oint_{|z-1|=3}\dfrac{e^z-z}{2\pi iz}dz$；

(5) $\oint\dfrac{\sin z+z}{z^3}dz$，环绕顶点为 $x=\pm1$，$y=\pm1$ 的正方形；

(6) $\oint_{|z|=2}\dfrac{z}{\sin z}dz$；　(7) $\oint_{|z-1|=1/2}\dfrac{\log z}{(z-1)^2}dz$。

3．用留数计算证明：若 n 是一个非负整数，则

$$\oint_C\left(z+\frac{1}{z}\right)^n dz=\begin{cases}\dfrac{2\pi i n!}{\left(\dfrac{n-1}{2}\right)!\left(\dfrac{n+1}{2}\right)!} & (n\text{ 是奇数})；\\ 0 & (n\text{ 是偶数})。\end{cases}$$

其中 C 是任何环绕原点的简单闭围道（提示：利用二项式定理）。

4．计算积分：

$$\oint_{\substack{|z|=R\\R>1}}(z^2-1)^{1/2}dz,$$

这里，被积函数的单值支选为由连接点 $z=1$ 和 $z=-1$ 的直线段裂缝所确定的，且在直线 $y=0$，$x>1$ 上 $(z^2-1)^{1/2}>0$ 的那一支。

(1) 证明：$(z^2-1)^{1/2}=z(1-1/z^2)^{1/2}=z-1/(2z)+\cdots$，$|z|>1$

（提示：考虑 $(1+w)^{1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n w^n$，$|w|<1$，令 $w=-1/z^2$）；

(2) 对 (1) 中所得到的劳朗级数通过逐项积分计算所给的积分。

5. 计算下列函数在指定点的留数：

(1) $\mathrm{Res}[z^2e^{1/z},0]$；　　(2) $\mathrm{Res}[e^z\sin z/z,0]$；

(3) $\mathrm{Res}[ze^{1/(z-1)},1]$；　　(4) $\mathrm{Res}[e^z/(\log(1/z)),1]$。

6. 求下列留数，其中 k 是任何整数：

(1) $\mathrm{Res}\left[z\,\mathrm{tg}z,k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$；　　(2) $\mathrm{Res}\left[\mathrm{tg}z/\cos z,k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$；

(3) $\mathrm{Res}[(e^z-1)/\sin^3z,\pi]$；　　(4) $\mathrm{Res}[\log z/(z^2+1)^2,i]$；

(5) $\mathrm{Res}[1/(z-1)^{10},1]$；　　(6) $\mathrm{Res}[\cos z/(z-1)^{10},1]$；

(7) $\mathrm{Res}\left[1/\sin(\cos z),\frac{\pi}{2}\right]$；　　(8) $\mathrm{Res}[1/\log z-1),e]$。

7. 一个函数能否在其简单极点处有零留数？一个函数能否在其高阶极点处有零留数？并解释之。

8. 求方程 $z^7-5z^4+z^2-2=0$ 在圆 $|z|<1$ 内根的个数。

9. 求方程 $z^4-8z+10=0$ 在圆 $|z|<1$ 与圆环 $1<|z|<3$ 内根的个数。

10. 证明：$z^4+7z+1=0$ 在圆环 $3/2<|z|<2$ 内有三个根。

11. 证明：若 $a>e$，则方程 $e^z=az^n$ 在圆 $|z|<1$ 内有 n 个根。

12. 证明：若 $a>1$，则方程 $ze^{a-z}=1$ 在圆 $|z|<1$ 内恰有一个根，且是正实根。

13. 证明：方程 $z=\lambda-e^{-z}(\lambda>1)$ 在右半平面内有唯一的一个根，且是实根。

14. 证明：如果 $\rho<1$，则对于充分大的 n，多项式

$$p_n(z)=1+2z+3z^2+\cdots+nz^{n-1}$$

在圆 $|z|<\rho$ 内没有零点。

15. 证明：z^6+3z^3+7z+5 在第一象限恰有两个零点。

16. 证明：z^4+iz^3+1 的四个零点都在圆 $|z|<\frac{3}{2}$ 内，而第一象限内恰有

一个零点。

17. 证明：方程 $p(z)=z^4+3z+3=0$ 在带域 $0<\mathrm{Im}z<1$ 内恰有一个根。

18. 利用尼奎斯特准则判别下述多项式的零点是否全部位于左半面内：

(1) z^3+z^2+9z+4 (答：稳定)；

(2) $z^3+z^2+3z+16$ (答：不稳定)；

(3) $z^5+6z^4+12z^2+11z+6$ (答：不稳定)；

(4) $z^4+z^3+3z^2+2z+1$ (答：不稳定)；

(5) $z^5+z^4+18z^3+12z^2+81z+81$ (答：不稳定)；

(6) $z^4+5z^3+8z^2+7z+3$ (答：稳定)。

19. 证明多项式

$$F_5(z)=1+Bz+\frac{z^2}{2!}+\frac{B}{3!}z^3+\frac{z^4}{4!}+\frac{B}{5!}z^5$$

在右半平面上至少有一个零点，其中 B 是常数。

§2 利用留数计算积分

2.1 单位圆周上的积分

考虑积分 $\int_0^{2\pi}\varphi(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$ 的计算，其中 $\varphi(x,y)$ 是两个变量 x 和 y 的有理函数。

若我们令 $z=e^{i\theta}$，则

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\quad \sin\theta=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right),\quad d\theta=\frac{dz}{iz};$$

于是

$$\int_0^{2\pi}\varphi(\cos\theta,\ \sin\theta)d\theta=\int_C\psi(z)dz,$$

其中 C 是单位圆周 $|z|=1$，而

$$\psi(z)=\varphi\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\ \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)/iz$$

是 z 的有理函数。因此，利用留数定理，有

$$\int_C\psi(z)dz=2\pi i\sum\mathrm{Res}\psi(a_j),\tag{3-21}$$

其中 a_j 是 $\psi(z)$ 在单位圆内的极点。

例 3-8 证明：若 $a>b>0$，则

$$J=\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta d\theta}{a+b\cos\theta}=\frac{2\pi}{b^2}\{a-\sqrt{(a^2-b^2)}\}。$$

证明 按上面所述作变数变换，若 C 是单位圆周 $|z|=1$，则

$$J=\frac{i}{2b}\int_C\frac{(z^2-1)^2dz}{z^2(z^2+2az/b+1)}=\frac{i}{2b}\int_C\frac{(z^2-1)^2dz}{z^2(z-\alpha)(z-\beta)}$$

$$=\frac{i}{2b}\int_C F(z)dz,$$

其中

$$\alpha=\frac{-a+\sqrt{(a^2-b^2)}}{b},\quad \beta=\frac{-a-\sqrt{(a^2-b^2)}}{b}$$

是 $z^2+2az/b+1=0$ 的根。

$$F(z)=\frac{(z^2-1)^2}{z^2(z-\alpha)(z-\beta)}。$$

由于根 α,β 的乘积是 1，我们有 $|\alpha||\beta|=1$，其中 $|\beta|>|\alpha|$，于是 $z=\alpha$ 是 C 内仅有的极点，原点是二阶极点。我们来计算它们的留数。

$$\operatorname{Res}F(\alpha)=\lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)F(z)=\lim_{z\to\alpha}\frac{(z^2-1)^2}{z^2(z-\beta)}=\frac{\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)^2}{\alpha-\beta}$$

$$=\frac{(\alpha-\beta)^2}{\alpha-\beta}=\alpha-\beta=\frac{2\sqrt{(a^2-b^2)}}{b}.$$

由于 $F(z)$ 在原点处的留数是 $F(z)$ 的劳朗展开式中 $1/z$ 的系数，即

$$F(z)=\frac{(z^2-1)^2}{z^2(z^2+2az/b+1)}=\frac{1-2z^2+z^4}{z^2(1+2az/b+z^2)}=\frac{1}{z^2}\left(1-\frac{2a}{b}z+\cdots\right),$$

所以，$1/z$ 的系数是 $-2a/b$。因此

$$J=\frac{i}{2b}\cdot 2\pi i[\operatorname{Res}F(\alpha)+\operatorname{Res}F(0)]=-\frac{\pi}{b}\left\{-\frac{2a}{b}+\frac{2\sqrt{(a^2-b^2)}}{b}\right\},$$

这就是所要证明的结果。

2.2 无限积分的计算

定理 1 设 $f(z)$是 z 的函数，它满足下列条件：

(1) 函数 $f(z)$在上半平面 $\mathrm{Im}z>0$ 除去有穷多个孤立奇点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 外是解析的；

(2) $f(z)$在实数轴上没有极点；

(3) 对 $0\leqslant \arg z\leqslant \pi$，当$|z|\to\infty$ 时，$zf(z)\to 0$；

(4) 若积分$\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$和$\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ 都收敛，则无限积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}f(a_k)。\qquad (3\text{-}22)$$

证明 取 R 充分大，使得上半圆：$|z|<R$，$\mathrm{Im}z>0$ 包含$f(z)$的所有孤立奇点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$（图 3.4），由留数定理，则得

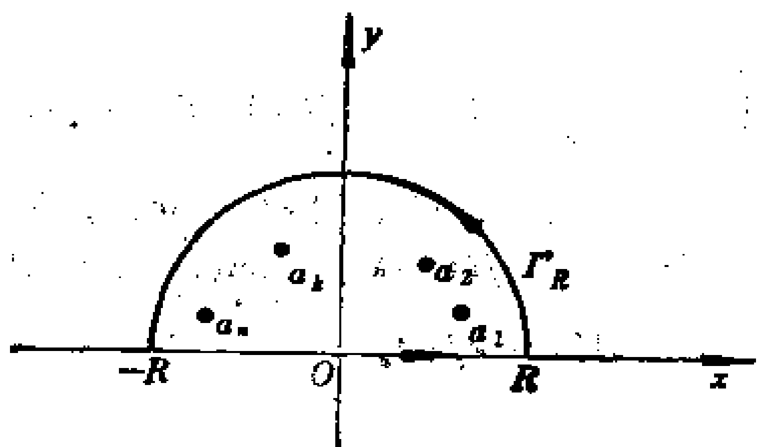


图 3.4

$$\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x+\int_{\Gamma_R} f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}f(a_k),$$

其中 Γ_R 是上半圆周。由条件(3)，若 R 充分大，则对 Γ_R 上的一切点 z 有$|zf(z)|<\varepsilon$，于是

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right|=\left|\int_0^{\pi} f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{i}\mathrm{d}\theta\right|<\varepsilon\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta=\pi\varepsilon。$$

因此，当 $R\to\infty$ 时，积分$\int_{\Gamma_R} f(z)\mathrm{d}z\to 0$。若条件 (4) 成立，即得

(3-22)式。

若 $f(z)$ 是有理函数，它是两个多项式之比 $N(z)/D(z)$，那么，若 $D(z)$ 的阶至少比 $N(z)$ 的阶高 2 次，则条件（4）是满足的，因为当 x 充分大时，$f(x)$ 与 $x^{-p}(p\geqslant 2)$ 是同阶的，而积分

$$\int_{\lambda}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p} \text{ 和 } \int_{-\infty}^{-\mu}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$$

都是收敛的。

例 3-9 证明：若 $a>0$，则

$$\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+a^4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}a^3}。$$

证明 若 $z^4+a^4=0$，我们有 $z^4=a^4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$，它有四个根：$a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$，$a\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4}$，$a\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi/4}$，$a^{\mathrm{i}7\pi/4}$，其中只有前两个根是位于上半平面内，因而 $a_1=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$，$a_2=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4}$ 是被积函数 $(z^4+a^4)^{-1}$ 的一阶极点。因此，若令 $f(z)=(z^4+a^4)^{-1}$，则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+a^4}=2\pi\mathrm{i}[\mathrm{Res}f(a_1)+\mathrm{Res}f(a_2)。$$

设 k 是 a_1 与 a_2 中的任何一个，则 $k^4=-a^4$，于是

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}f(k)&=\lim_{z\to k}(z-k)/(z^4-k^4)=\lim_{z\to k}(z^3+z^2k+zk^2+k^3)^{-1}\\&=1/4k^3=-k/4a^4。\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+a^4}&=-2\pi\mathrm{i}(a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}+a\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4})/4a^4\\&=-\frac{\pi\mathrm{i}}{2a^3}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4})=-\frac{\pi\mathrm{i}}{2a^3}2\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}a^3}。\end{aligned}$$

故 $\int_0^{\infty}(x^4+a^4)^{-1}\mathrm{d}x=\pi/2\sqrt{2}a^3$。

上述定理能推广到 $f(z)$ 在实数轴上只有简单极点的情形。设 $a>0$，$z=a$ 是 $f(z)$ 的一阶极点，则其留数为

$$\mathrm{Res}f(a)=\lim_{z\to a}(z-a)f(z)。$$

又若主值积分

$$\text{V. P.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\substack{R\to\infty\\ \rho\to 0}}\left[\int_{-R}^{a-\rho}+\int_{a+\rho}^{R}\right]f(x)\mathrm{d}x \quad \text{存在}$$

则我们有

$$\text{V. P.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\left[\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\, f(a_k)+\frac{1}{2}\mathrm{Res} f(a)\right]。\quad (3\text{-}23)$$

事实上，设γ是上半圆周：$|z-a|=\rho$，$\mathrm{Im}z\geqslant 0$（图3.5），据留数定理，我们有

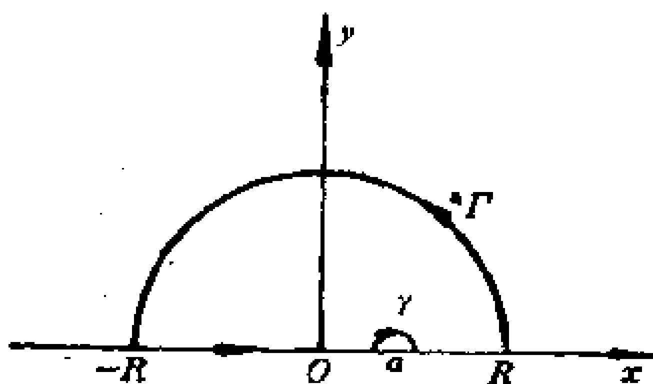


图 3.5

$$\left(\int_{\Gamma}+\int_{-R}^{a-\rho}+\oint_{\gamma}+\int_{a+\rho}^{R}\right)f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum\mathrm{Res} f(a_k)。$$

从而

$$\text{V. P.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum\mathrm{Res}\, f(a_k)+\lim_{\rho\to 0}\oint_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z。$$

由于$\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)=\mathrm{Res}f(a)$，则对任意给定的$\varepsilon>0$，当$\rho$充分小时，有
$$|(z-a)f(z)-\mathrm{Res}f(a)|<\varepsilon,\quad 0<|z-a|\leqslant\rho。$$
于是

$$\int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z=\int_{\gamma}(z-a)f(z)\frac{\mathrm{d}z}{z-a}=\int_{\gamma}\mathrm{Res}f(a)\frac{\mathrm{d}z}{z-a}$$
$$+\int_{\gamma}[(z-a)f(z)-\mathrm{Res}f(a)]\frac{\mathrm{d}z}{z-a}。$$

但是，当ρ充分小时，第二项积分的绝对值小于$\pi\varepsilon$，而

$$\int_{\gamma}\mathrm{Res}f(a)\frac{\mathrm{d}z}{z-a}=\mathrm{i}\pi\mathrm{Res}f(a),$$

故（3-23）式是成立的。

2.3 利用若当引理计算无限积分

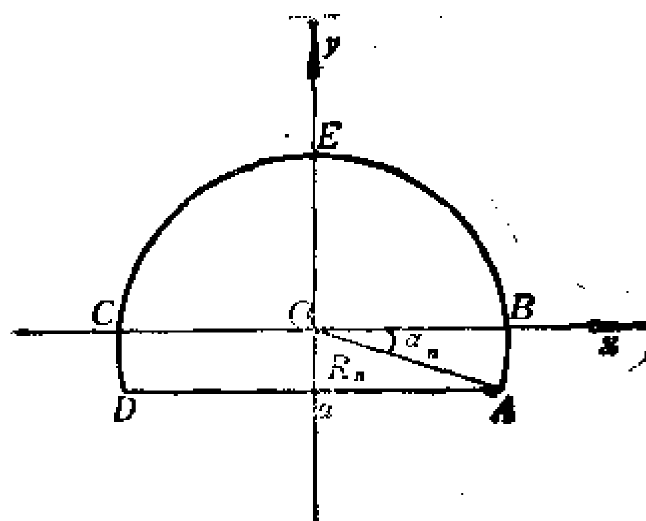


图 3.6

若当引理 设圆弧 $\Gamma_{R_n}=\{z\in\mathscr{C}:|z|=R_n,\ \mathrm{Im}z>-a\}$，$a$ 是实数。若当 $R_n\to\infty$ 时函数 $g(z)$ 在某列圆弧 Γ_n 上关于 $\arg z$ 一致地收敛于零，则对任何正数 λ，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Gamma_{R_n}}g(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z\lambda}\mathrm{d}z=0_{\circ} \tag{3-24}$$

证明 设 $z=x+\mathrm{i}y=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$M_n=\max\limits_{z\in\Gamma_{R_n}}|g(z)|$，$\alpha_n=\arcsin\dfrac{a}{R_n}$。根据引理的条件，当 $n\to\infty$ 时，$M_n\to0$，$\alpha_n\to0$，并且 $\alpha_nR_n\to a$。若 $a>0$，则在圆弧 AB 和 CD 上（图3.6），$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z}|=\mathrm{e}^{-\lambda y}\leqslant\mathrm{e}^{a\lambda}$，因而

$$\left|\int_{AB,CD}g(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z}\mathrm{d}z\right|\leqslant M_n\mathrm{e}^{a\lambda}\alpha_nR_n,$$

且当 $n\to\infty$ 时沿着这些圆弧上的积分趋于零。

由于在上半圆弧 BEC 上，有

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z}|=|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(R_n\cos\theta+\mathrm{i}R_n\sin\theta)}|=\mathrm{e}^{-\lambda R_n\sin\theta},$$

因此

$$\left|\int_{BEC}g(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z}\mathrm{d}z\right|\leqslant M_nR_n\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-\lambda R_n\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=2M_nR_n\int_{0}^{\pi/2}\mathrm{e}^{-\lambda R_n\sin\theta}\mathrm{d}\theta_{\circ}$$

但是，由于函数 $\sin\theta/\theta$ 在区间 $\left[0,\ \dfrac{1}{\pi}\right]$ 上是严格单调下降的，所以

$$\frac{\sin\theta}{\theta} \geqslant \frac{2}{\pi}。$$

因此

$$\left|\int_{BEC} g(z) e^{i\lambda z} dz\right| \leqslant 2M_n R_n \int_0^{\pi/2} e^{-2\lambda R_n \theta/\pi} d\theta$$

$$= \frac{M_n \pi}{\lambda}(1 - e^{-\lambda R_n}) \to 0 (a \to \infty),$$

故引理成立。当 $a \leqslant 0$ 时，由上述证明过程可知，引理也是成立的。引理证毕。

在上述若当引理中，若令 $iz = p$，便得下述引理。

变形的若当引理 设圆弧 $\Gamma_R = \{p \in \mathscr{C}: \ |p| = R, \ \mathrm{Re}p < a, a > 0\}$（图 3.7）。若函数 $F(p)$ 当 $R \to \infty$ 时在圆弧 Γ_R 上关于 $\arg p$ 一致地收敛于零，则对任何正数 t，有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} F(p) e^{pt} dp = 0。 \tag{3-25}$$

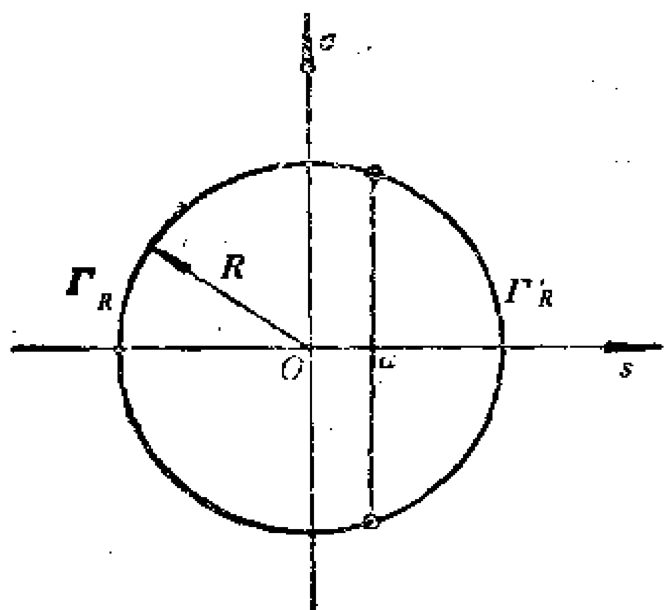


图 3.7

若函数 $F(z)$ 当 $R \to \infty$ 时在圆弧 Γ'_R 上关于 $\arg p$ 一致地收敛于零，则对任何负数 t，有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma'_R} F(p) dp = 0, \tag{3-26}$$

其中 $\Gamma'^R = \{p \in \mathscr{C}: \ |p| = R, \ \mathrm{Re}z > a > 0\}$。

利用若当引理，我们能计算另一类无限积分。

定理 2 设 $f(z) = N(z)/D(z)$，其中 $N(z)$ 和 $D(z)$ 是多项式，$D(z) = 0$ 在实数轴上没有根。若

① $D(z)$ 的次数至少比 $N(z)$ 的次数大一次；

② $\lambda > 0$，

则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}dx = 2\pi i\sum_k \text{Res}f(a_k)e^{i\lambda a_k}, \tag{3-27}$$

其中$\{a_k\}$是$f(z)$在上半平面的极点。

证明 取R充分大，使得上半圆（图3.4）包含$f(z)$的所有极点a_k（当然只有有限多个），于是由留数定理得

$$\int_{-R}^{R} f(x)e^{i\lambda x}dx + \int_{\Gamma_R} f(z)e^{i\lambda z}dz = 2\pi i\sum_k \text{Res}f(a_k)e^{i\lambda a_k}。$$

但是，据若当引理，当$R\to\infty$时，积分$\int_{\Gamma_R} f(z)e^{i\lambda z}dz$趋于零。故（3-27）式成立。

例3-10 计算积分

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}dx。$$

解 取$f(z)=(z^2+a^2)^{-1}$，它在上半面恰有一个一阶极点$z=ai$，其留数$\text{Res}f(ai)=\lim\limits_{z\to ai}(z-ai)f(z)=1/2ai$，因此，由公式（3-27）便得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}dx}{x^2+a^2} = 2\pi ie^{-a}/2ai = \pi/ae^a。$$

对上式取其实部，并利用$\cos x$是偶函数，即得

$$I = \int_0^{\infty}(x^2+a^2)^{-1}dx = \pi/2ae^a。$$

若（定理2中的）被积函数$f(z)$在实轴上有一阶极点a，则

$$\text{V.P.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}dx = 2\pi i\{\sum_k \text{Res}f(a_k)e^{i\lambda a_k} + \frac{1}{2}\text{Res}f(a)e^{i\lambda a}\} \tag{3-28}$$

其中主值积分$\text{V.P.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}dx = \lim\limits_{\substack{R\to\infty\\ \rho\to 0}}\left[\int_{-R}^{a-\rho}+\int_{a+\rho}^{R}\right]f(x)e^{i\lambda x}dx。$

例3-11 证明：若$\lambda>0$，则

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin\lambda x}{x}dx = \frac{1}{2}\pi。$$

证明 事实上，$f(z)=z^{-1}$在$z=0$处恰有一个一阶极点，其$\text{Res}f(0)$

$=1$，于是据公式(3-28)，我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda x}dx}{x}=\pi i。$$

对上式取其实部和虚部，我们得到

$$V.P.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\lambda x dx}{x}=0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\lambda x}{x}dx=\pi;$$

第二个积分中的"V.P."是不必要的，因为当 $x\to 0$ 时，$(\sin\lambda x)/x$ 趋于零。由于 $\sin\lambda x/x$ 是偶函数，由第二个结果即得

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\lambda x}{x}dx=\frac{1}{2}\pi。$$

2.4 多值函数的积分

$\int_0^{\infty}x^{a-1}g(x)dx$，$a$ 不是整数，也能利用围道积分进行计算。这时由于 z^{a-1} 是多值函数，有必要将复平面沿正实轴割开。设 Γ 表示圆周 $|z|=R$，γ 表示圆周 $|z|=\rho$（图3.8）。

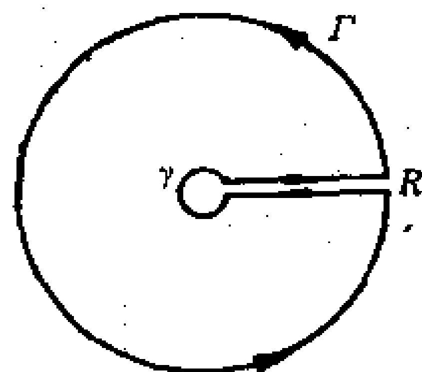


图 3.8

定理 3 设 $g(x)$ 是 x 的有理函数，并且在正实轴上没有极点。若我们记 $f(z)=z^{a-1}g(z)$，并且假设：当 $|z|\to 0$ 和 $|z|\to\infty$ 时，$zf(z)$ 关于 $\arg z$ 一致地收敛于零，则

$$\int_0^{\infty}x^{a-1}g(x)dx=\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i a}}\sum_k \text{Res}\, f(a_k)=\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i a}}\sum_k a_k^{a-1}\text{Res}\, g(a_k), \tag{3-29}$$

其中 a_k 是 $f(z)$ 即 $g(z)$ 的极点。

证明 事实上，在 Γ 上，若 R 充分大，则 $|zf(z)|<\varepsilon$，于是

$$|f(z)|<\varepsilon/R,$$

$$\left|\int_{\Gamma}f(z)dz\right|<\frac{\varepsilon}{R}2\pi R=2\pi\varepsilon。$$

同理，在 γ 上，若 ρ 充分小，则 $|zf(z)|<\varepsilon$，于是 $|f(z)|<\varepsilon/\rho$，并且

$$\left|\int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z\right| < \frac{\varepsilon}{\rho} 2\pi\rho = 2\pi\varepsilon。$$

另外，若 $z=re^{i\theta}$，则我们有 $z^{a-1}=r^{a-1}e^{i(a-1)\theta}$。当 z 位于正实轴裂纹的上沿时，$\arg z=\theta=0$；当 z 位于正实轴裂纹的下沿时，$\theta=\arg z=2\pi$。于是，据留数定理，令 $\rho\to0$，$R\to\infty$，我们有

$$\int_0^\infty x^{a-1}g(x)\mathrm{d}x + \int_\infty^0 x^{a-1}e^{2\pi i(a-1)}g(x)\mathrm{d}x = 2\pi i\sum_k \mathrm{Res} f(a_k)。$$

由于 $e^{2\pi i(a-1)}=e^{2\pi ia}$，因此有

$$\int_0^\infty x^{a-1}g(x)\mathrm{d}x = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi ia}}\sum_k \mathrm{Res} f(a_k)。$$

我们还要注意，当计算在极点的留数时，还必须给 z^{a-1} 以正确的值 $r^{a-1}e^{i\theta(a-1)}$。

例 3-12 证明：若 $0<a<1$，则

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\mathrm{d}x}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi}。$$

证明 事实上，这里 $f(z)=z^{a-1}/(1+z)$，当 $|z|\to\infty$ 时，因 $a<1$，所以 $zf(z)\to0$；当 $|z|\to0$ 时，因 $a>0$，则 $zf(z)\to0$。因此，若 $0<a<1$，则当 $R\to\infty$ 时，沿 Γ 的积分趋于零；当 $\rho\to0$ 时，沿 γ 的积分趋于零。于是，

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\mathrm{d}x}{1+x} = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi ia}}\mathrm{Res} f(-1)。$$

在点 $z=-1$，$r=1$，$\theta=\pi$，于是

$$\mathrm{Res} f(-1) = \lim_{z\to-1}(1+z)f(z) = (-1)^{a-1} = e^{(a-1)\pi i} = -e^{a\pi i}。$$

因此

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\mathrm{d}x}{1+x} = -2\pi i\frac{e^{a\pi i}}{1-e^{2\pi ia}} = -2\pi i\frac{1}{e^{-a\pi i}-e^{a\pi i}}$$

$$= \pi/\sin a\pi。$$

若定理 3 中的有理函数 $g(z)$ 在正实数轴上有一阶极点 b，则

$$\mathrm{V.P.}\int_0^\infty x^{a-1}g(x)\mathrm{d}x = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi ia}}\left\{\sum_k \mathrm{Res} f(a_k) + \right.$$

$$+\frac{1}{2}(1+e^{2\pi i a})\mathrm{Res}f(b)\Big\}$$

$$=\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i a}}\Big\{\sum_k a_k^{a-1}\mathrm{Res}g(a_k)+$$

$$+\frac{1}{2}(1+e^{2\pi i a})b^{a-1}\mathrm{Res}g(b)\Big\},\qquad(3\text{-}30)$$

其中 $\mathrm{V.P.}\int_0^\infty x^{a-1}g(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{\rho\to 0,\,r\to 0,\,R\to\infty}\left(\int_\rho^{b-r}+\int_{b+r}^R\right)x^{a-1}g(x)\mathrm{d}x$。

事实上，设 $f(z)=z^{a-1}g(z)$，作闭围道，如图 3.9 所示，由留数定理，我们有

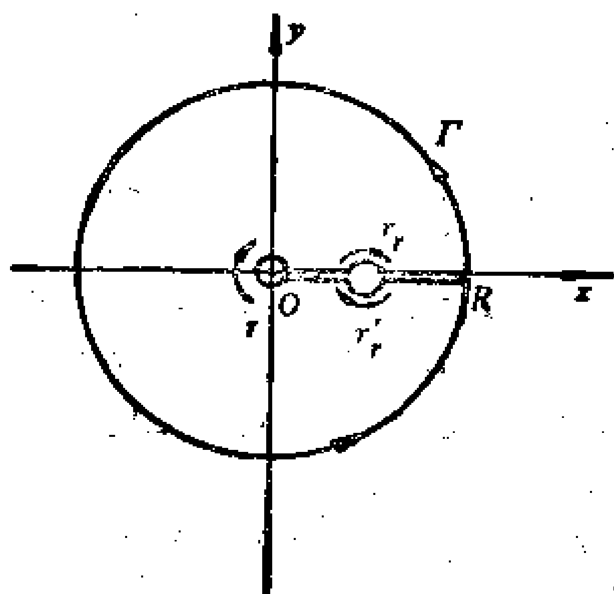


图 3.9

$$\int_\gamma+(1-e^{2\pi i a})\left\{\int_\rho^{b-r}+\int_{b+r}^R\right\}f(x)\mathrm{d}x+\int_{\gamma_r^-}+\int_{\gamma_r'^-}$$

$$+\int_\Gamma=2\pi i\sum_k\mathrm{Res}f(a_k)。\qquad(3\text{-}31)$$

这里我们用到了 $f(xe^{2\pi i})=e^{2\pi i a}f(x)$。但是，由于

$$\oint_{\gamma_r^+}z^{a-1}g(z)\,\mathrm{d}z=\oint_{\gamma_r}z^{a-1}(z-b)g(z)\frac{\mathrm{d}z}{z-b}=\mathrm{Res}f(b)\oint_{\gamma_r}\frac{\mathrm{d}z}{z-b}$$

$$+\int_{\gamma_r}[(z-b)f(z)-\mathrm{Res}f(b)]\frac{\mathrm{d}z}{z-b},$$

且当 $r\to 0$ 时，上式右端第二项趋于零，而第一项$=\pi i b^{a-1}\mathrm{Res}g(b)$，又

$$\oint_{\gamma'_r} + z^{a-1}g(z)\,\mathrm{d}z = b^{a-1}e^{2\pi i a}\mathrm{Res}\,g(b)\oint_{\gamma'_r}\frac{\mathrm{d}z}{z-b}$$

$$+\int_{\gamma'_r}[z^{a-1}(z-b)g(z)-b^{a-1}e^{2\pi i(a-1)}\mathrm{Res}g(b)]\frac{\mathrm{d}z}{z-b},$$

且当 $r\to 0$ 时上式右端第二端趋于零，而第一项为

$$\pi i b^{a-1}e^{2\pi i a}\mathrm{Res}g(b)。$$

注意到：当 $\rho\to 0$ 时$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z\to 0$，当 $R\to\infty$ 时$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z\to 0$，于是，在(3-31)式中令 $\rho\to 0$，$r\to 0$ 和 $R\to\infty$，即得我们所要求的结果（3-30）。

例 3-13 计算下述奇异积分的主值：

$$I=\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1-x}\mathrm{d}x \quad (0<a<1)。$$

解 取 $g(z)=(1-z)^{-1}$，$f(z)=z^{a-1}g(z)$。由于 $0<a<1$，所以当 $\rho\to 0$ 和 $R\to\infty$ 时，$zf(z)\to 0$，这收敛关于 $\arg z$ 是一致的。另外，$z=1$ 是 $g(z)$ 的一阶极点，其留数 $\mathrm{Res}g(1)=-1$。因此，由公式（3-30），我们有

$$\mathrm{V.P.}\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1-x}\mathrm{d}x = -\frac{\pi i(1+e^{2\pi i a})}{1-e^{2\pi i a}}=\pi\mathrm{ctg}(\pi a)。$$

习　题

1．由留数计算下列诸积分：

(1) $\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{2+\cos\theta}$；　(2) $\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a+b\sin\theta}$，$a>b$；

(3) $\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{a+b\cos\beta}\mathrm{d}\theta$，$a>b$；　(4) $\int_0^{2\pi}\frac{\cos 3\theta}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta$；

(5) $\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(a+b\sin\theta)^2}$，$a>b$；　(6) $\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{9+\sin\theta}$；

(7) $\int_0^{2\pi} \cos^4\theta \mathrm{d}\theta$；　　　(8) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta}{\operatorname{ch} a + \cos\theta} \mathrm{d}\theta$，

其中 $a \neq 0$ 是一个实数，n 是个整数。

2．下列积分的柯西主值存在吗？

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} \mathrm{d}x$；　　　(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x$；

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{x^2+1} \mathrm{d}x$；　　　(4) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^2+1} \mathrm{d}x$。

3．利用留数计算下列积分，必要时用柯西主值：

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} \mathrm{d}x$；　　　(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x-3)^2+9}$；

(3) $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^6+1}$；　　　(4) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$；

(5) $\int_{-\infty}^{0} \frac{x^2 \mathrm{d}x}{x^4+x^2+1}$；　　　(6) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+9)(x^2+16)}$；

(7) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+x^2+x^3}{(x^2+1)(x^2+9)} \mathrm{d}x$；

4．利用留数计算下列积分。必要时用柯西主值：

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+9} \mathrm{d}x$；　　　(2) $\int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos x}{x^4+x^2+1} \mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos 2x}{(x^2+9)^2} \mathrm{d}x$；

(4) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax \mathrm{d}x}{(x^2+b^2)(x^2+c^2)}$，其中 $b \neq c$，$b, c \neq 0$，a，b，c 是实数，

(5) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 3x}{(x^2+9)(x^2+1)} \mathrm{d}x$；　　　(6) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x \mathrm{d}x}{[(x-1)^2+1](x^2+1)}$；

(7) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)\cos x}{[(x-1)^2+1]^2} \mathrm{d}x$；

(8) $\int_0^{\infty} \frac{\cos^2 x}{(x^2+b^2)(x^2+c^2)} \mathrm{d}x$，$b, c$ 是实数，且 $b, c \neq 0$；

(9) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{(x-c)^2+d^2} \mathrm{d}x$；

其中 a, b, c 是实数，且 $d \neq 0$ （提示 $\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}\sin(a+b)x$

$$+\frac{1}{2}\sin(a-b)x),$$

(10) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(x-1)}{x^2+1}dx$。

5.(1) 设 C_R 是位于下半平面半径为 R 的半圆周，如图3.10所示。证明：

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{P(z)}{Q(z)}e^{i\nu z}dz=0,$$

其中 $\nu<0$，Q 和 P 是多项式，且 Q 的次数 $-P$ 的次数$\geqslant 1$。这是在下半平面的若当引理。

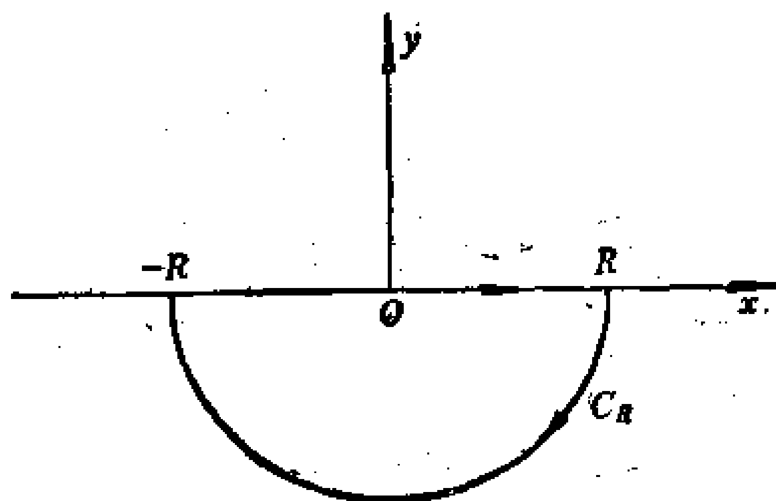


图 3.10

(2) 用图3.10的闭围道，允许 $R\to\infty$，计算 $(P(z)/Q(z))e^{i\nu z}$ 的积分，并利用 (1) 所得到的结果，证明：若 $\nu<0$ 且对于 $-\infty<x<+\infty$ $Q(x)\neq 0$，则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}e^{i\nu x}dx=-2\pi i\sum_{j}\text{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)}e^{i\nu z},\ z_j\right] \qquad (3\text{-}32)$$

其中，$\{z_j\}$ 是 $Q(z)$ 的位于下半平面中的一切零点。为什么在方程3-32中会有负号？

(3) 设 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 是实函数，用方程 (3-32) 证明：对 $\nu<0$，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos\nu x\frac{P(x)}{Q(x)}dx=-\text{Re}\left[2\pi i\sum_{j}\text{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}e^{i\nu z},z_j\right)\right], \qquad (3\text{-}33)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin\nu x\frac{P(x)}{Q(x)}dx=-\text{Im}\left[2\pi i\sum_{j}\text{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}e^{i\nu z},z_j\right)\right], \qquad (3\text{-}34)$$

其中，$\{z_j\}$是$Q(z)$的位于下半平面的一切零点。

在（2）和（3）的情况下，用方程（3-33）是有帮助的。

6．用留数计算下列积分：

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i3x}}{(x^2+1)(x^2+2)}dx$；　　(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i3x}}{(x^2+1)(x^2+2)}dx$；

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ix}}{(x-1)^2+1}dx$。

7．

(1) 解释为什么$\int_{-\infty}^{+\infty}(\sin 2x)/(x-i)dx$不能用下列公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\nu x\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\text{Im}\left[2\pi i\sum_{z_j}\text{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)},z_j\right)\right],\nu>0\quad(3\text{-}35)$$

来计算？其中，$\{z_j\}$是$Q(z)$的位于上半平面的一切零点，Q的次数－P的次数≥ 1。

(2) 通过下述公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}e^{i\nu x}dx=2\pi i\sum_{z=j}\text{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}e^{i\nu z},z_j\right),\quad\nu>0\quad(3\text{-}36)$$

和公式(3-32)来计算（1）中的积分，其中，$\{z_j\}$是$Q(z)$的位于上半平面上的一切零点，Q的次数－P的次数≥ 1（提示：将$\sin 2x$用e^{i2x}和e^{-i2x}来表示）。

8．用题7中的方法计算下列积分：

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}dx$；

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega x}\cos x}{x^2+1}dx$，$\omega\leq 1$，$-1<\omega\leq 1$，$\omega\geq 1$；

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega x}\sin x}{x^2+1}dx$，$\omega$的选取如(2)中所述。

9．解释为什么借助下列公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\cos\nu x\,dx=\text{Re}\left[2\pi i\sum_{z_j}\text{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}e^{i\nu z},z_j\right)\right],\quad\nu>0$$

来计算$\int_0^{\infty}(\cos x)/(x^2+1)dx$，而不借助公式（3-35）来计算$\int_0^{\infty}(\sin x)/(x^2+1)dx$。这后面一个积分必须用数值表或计算机程序来计算。

10．(1) 求$\oint_{|z|=1}((z+1)/z)dz$；

(2) 求 $\int_C ((z+1)/z)\mathrm{d}z$，其中 C 是上半圆周 $|z|=1$，$0\leqslant \arg z\leqslant \pi$，积分路径按反时针方向；

(3) 在 (2) 中，用 (1) 的上半圆周求积分，得到的结果是否是 (1) 的一半？解释之。

11.

(1) 计算 $\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon}(z+1)/(z-1)\mathrm{d}z$ 沿半径为 ε 的上半圆周积分，如图 3.11 所示；

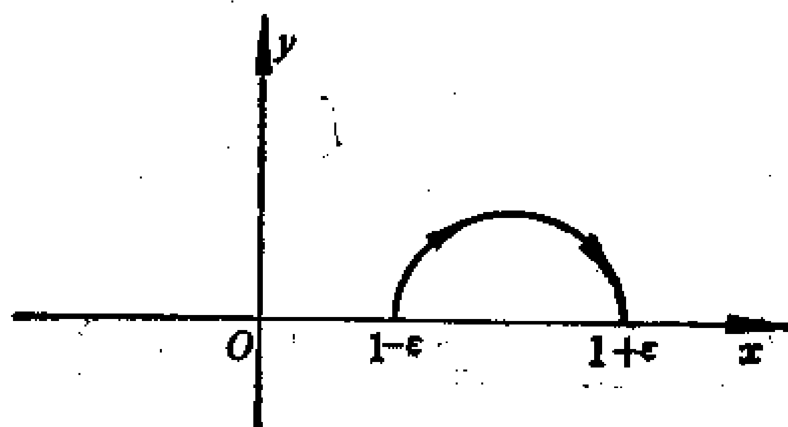


图 3.11

(2) 在 (1) 的答数中令 $\varepsilon\to 0$，其极限是 $-2\pi\mathrm{i}\,(1/2)\,\mathrm{Res}[(z+1)/(z-1),1]$。

12. 求下列积分的柯西主值：

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 3x}{(x+1)}\mathrm{d}x$；

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2-1}\mathrm{d}x$；

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{(x^2-1)(x^2+1)}\mathrm{d}x$；

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(x/2)}{(x^2-\pi^2)}\mathrm{d}x$；

(5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{(x-\pi)(x+1)(x^2+1)}\mathrm{d}x$；

(6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x$，

其中 a,b,c 是实数，$b^2>4ac$。试解释：若 $b^2=4ac$，将碰到什么困难，仍能找

出其柯西主值吗?

13. 求下列积分的柯西主值:

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$

解释如何由这积分产生 $\int_0^{\infty}\sin x\,/x\,dx$.

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$,

$\left(提示: \sin^2 x = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x = \mathrm{Re}\left[\left(\frac{1-e^{i2x}}{2}\right)\right]\right.$.

14. 证明:

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{\cos t - e^{-t}}{t}\right)dt = 0,$$

(提示: 对 e^{iz}/z 沿如图 3.12 所示的围道积分, 且允许 $\varepsilon\to 0$, $R\to+\infty$).

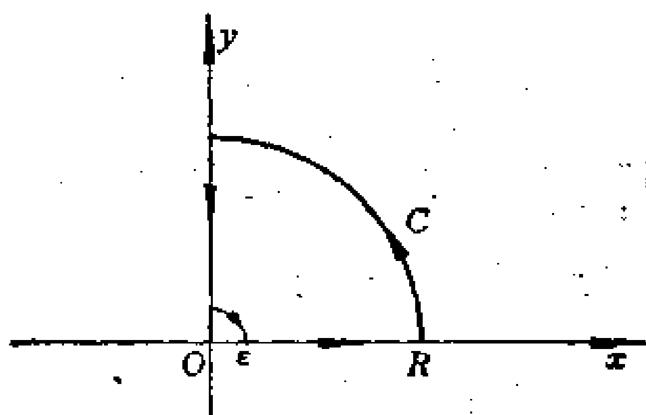


图 3.12

15. 证明:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\,dx = \pi(b-a),\quad b>0,\quad a>0,$$

$\left(提示: 被积函数等于 \mathrm{Re}\left[\frac{e^{iax}-e^{ibx}}{x^2}\right]\right)$.

16. 用图 3.13 的围道证明:

$$\int_0^{\infty}(\log x)/(x^2+1)dx = 0.$$

17.

(1) 求 $\int_0^{\infty}(\log x)/(x^4+16)dx$;

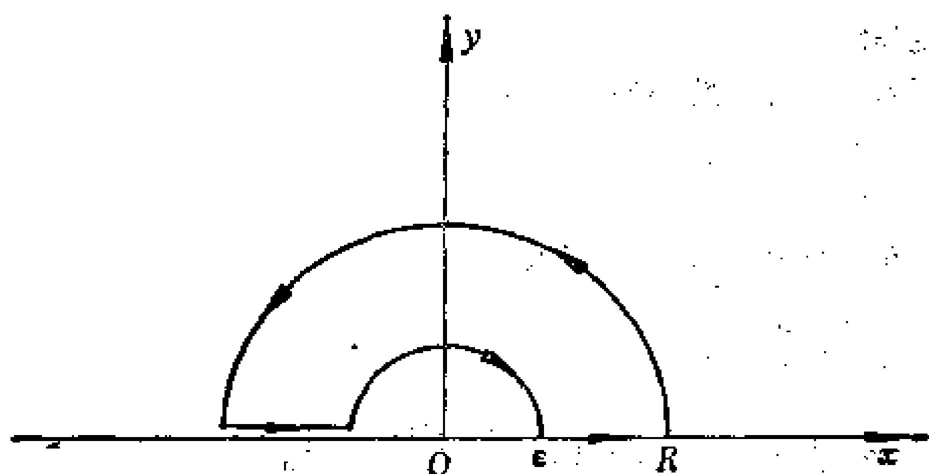


图 3.13

(2) 求$\int_0^{\infty} x^2(\log x)/(x^4+16)\mathrm{d}x$。

18.

(1) 沿图 3.12 的围道估计$\oint_C \mathrm{e}^{iz}/z^{1/2}\mathrm{d}z$，并允许$\varepsilon\to 0$和$R\to\infty$，证明：

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-y}}{\sqrt{2y}}\mathrm{d}y;$$

(2) 在积分中关于y作变数变换$u^2=y$，利用表估计所得的关于u的积分，并证明：

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

19. 利用如图 3.14 所示的圆周围道，证明：

$$\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{1/e}(x+1)^2}=\frac{\pi}{e\sin(\pi/e)},\qquad 取\ x^{1/e}\geqslant 0.$$

20. 用上述围道证明：

$$\int_0^{\infty}\frac{x^a}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sin(a\pi)}(2^a-1),\ -1<a<1,$$

其中x^a和$2^a\geqslant 0$。

21. 证明：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{au}}{1+\mathrm{e}^u}\,\mathrm{d}u=\frac{\pi}{\sin(a\pi)},\quad 0<a<1,$$

(提示：令$x=\mathrm{e}^u$)。

22. 证明：

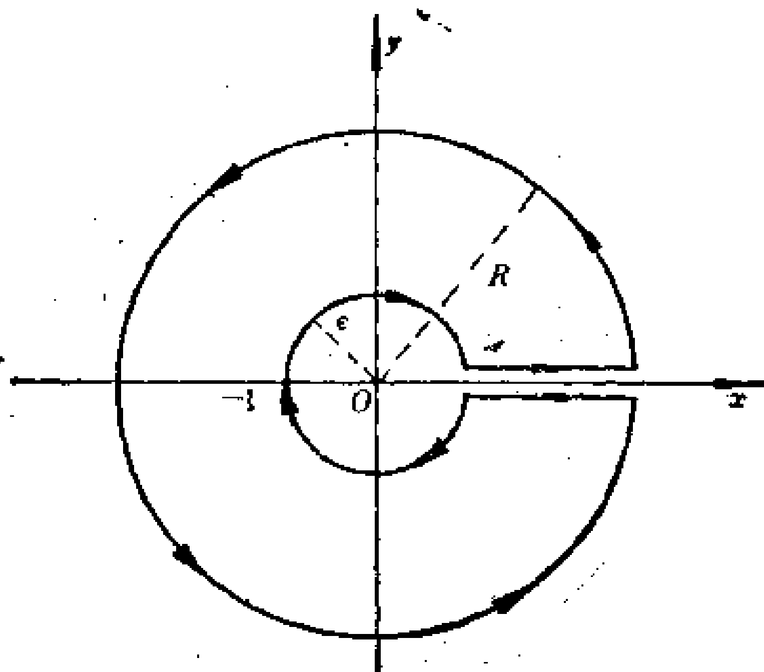


图 3.14

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{1/\alpha}\mathrm{d}x}{x^2-a^2}=\frac{\pi}{2a}\frac{a^{1/\alpha}}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}\left[1-\cos\frac{\pi}{\alpha}\right]\quad(柯西主值)，$$

其中 $a>0$，$a^{1/\alpha}>0$，$x^{1/\alpha}\geqslant 0$ 和 $-1<1/\alpha<1$。

23．

（1）证明：

$$\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}\ \log x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}，$$

（2）证明：

$$\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sqrt{2}}。$$

24，证明：

$$\int_0^{\infty}\frac{\log(1+x)}{x^{\alpha}}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{(1-\alpha)\sin(\alpha\pi)}，$$

其中 $x^{\alpha}\geqslant 0$ 和 $1<\alpha<2$。

25．证明：

$$\int_0^{\infty}\frac{(\log x)^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^3}{8}。$$

§3 劳斯-霍尔维茨判别法

3.1 根全位于单位圆内的判别法

在近代技术中，由于大量应用自动控制仪器，自动调节理论有特别重要的作用。在设计自动调节器时，产生的最重要问题之一是关于机器—调节器系统工作的稳定性问题。

最早的自动调节系统是蒸汽机的系统——瓦特离心调速器。离心调速器在18世纪和19世纪前半期就其担负的使命来说是完全成功的，到19世纪中叶，由于技术的发展，如零件表面加工的改善，导致摩擦的减小，机器运转速度的提高，汽门质量的增加，以及减少速度对负荷的依赖关系，导致它的构造上的变化，破坏了调节器系统工作的稳定性。这种问题归结为讨论常系数线性微分方程

$$L(x)=a_0\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n=0 \qquad (3-37)$$

的解的稳定性，其中 $a_0,a_1,\cdots a_n$ 是实系数。我们知道，这种方程的通解是

$$x(t)=c_1e^{p_1t}+c_2e^{p_2t}+\cdots+c_ne^{p_nt}, \qquad (3-38)$$

其中 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是上述常微分方程的特征多项式

$$A(p)=a_0p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_n,\qquad a_0>0 \qquad (3-39)$$

的 n 个根，c_1，c_2，$\cdots$，c_n 是任意的复数常数。设每个复根为 $p_k=s_k+i\sigma_k$，则对应于具有角频率 σ_k 的振动为

$$e^{p_kt}=e^{s_kt}(\cos\sigma_kt+i\sin\sigma_kt)。$$

当 $s_k<0$ 时，这振动是渐止的；当 $s_k=0$ 时，它是调和的；而当 $s_k>0$ 时，它有无限增大的振幅。因此，假如我们要使振动成为不具有无增大的振幅的固有振动，则我们应当要求该特征多项式 $A(p)$ 的根全部位于左半平面上。

工程师斯笃道拉(Stodola)向数学家霍尔维茨(Hurwitz)提出了上述常系数线性微分方程的解的稳定性问题，即寻求任一 n 次多项式 $A(p)$ 的所有零点全位于左半平面的判据问题。霍尔维茨完满地解决

了这一问题，使控制理论的早期发展强烈地强调基于劳斯（Routh）—霍尔维茨结果的稳定性理论。霍尔维茨定理是理论与实际相互促进的一个很好的例子。

近代计算机技术的发展，又促使科技界要研究离散调节系统或脉冲调节系统的稳定性问题，而这问题又归结为多项式$A(z)$的根应完全位于单位圆内。

设多项式$A(z)$的系数都是实数，并且$a_0>0$。如果它的所有零点都位于单位圆内，则称$A(z)$是**稳定的**。设

$$A^*(z)=z^n A(z^{-1})=a_0+a_1z^1+\cdots+a_nz^n, \tag{3-40}$$

进一步引进多项式

$$A_k(z)=a_0^k z^k+a_1^k z^{k-1}+\cdots+a_k^k, \tag{3-41}$$

注意：(3-41)式中系数$a_i^k(i=0,1,2,\cdots,k-1)$的上角$k$是上指标，而不是幂指数。它们由下述方程所递推地定义：

$$A_{k-1}(z)=z^{-1}\{A_k(z)-\alpha_k A_k^*(z)\}, \tag{3-42}$$

其中

$$\alpha_k=a_k^k/a_0^k, \tag{3-43}$$

$$A_n(z)=A(z)。 \tag{3-44}$$

于是多项式$A_k(z)$的系数由下述递推方程所给出：

$$a_i^{k-1}=a_i^k-\alpha_k a_{k-i}^k \qquad i=0,1,\cdots,k-1, \tag{3-45}$$

并具有初始条件

$$a_i^n=a_i。 \tag{3-46}$$

若要上述给定的方程有意义，我们自然必须要求一切a_0^k都异于零。下述定理给出了其必要兼充分的条件。

定理1 设$a_0^k>0$，则下列条件是等价的：

(1) 多项式$A_k(z)$是稳定的；

(2) 多项式$A_{k-1}(z)$是稳定的，并且$a_0^{k-1}>0$。

重复应用这个定理，于是，我们发现，若多项式$A_n(z)$是稳定的，则一切系数a_0^k是正的。

为了证明上述定理，先证下述结果。

引理1 设多项式$f(z)$的系数都是实数，并且其所有的零点都位

于单位圆内，则

$$|f(z)|<|f^*(z)|,\qquad |z|<1,$$
$$|f(z)|=|f^*(z)|,\qquad |z|=1,$$
$$|f(z)|>|f^*(z)|,\qquad |z|>1。$$

证明 据代数基本定理，n 次多项式在复平面上有 n 个根，令

$$f(z)=\beta\prod_{i=1}^{n}(z-a_i),\quad |a_i|<1,$$

则

$$f^*(z)=\beta\prod_{i=1}^{n}(1-a_iz)。$$

令

$$w(z)=\frac{f(z)}{f^*(z)}=\prod_{i=1}^{n}\frac{z-a_i}{1-a_iz}。$$

由于 a_i 是实数，$\overline{a_i}=a_i$，因此，据前面所证，分式线性函数 $w_i=(z-a_i)/(1-a_iz)$ 把 $|z|<1$ 的内部一对一地映照到 $|w|<1$ 上，把单位圆的外部 $|z|>1$ 一对一地映照到 $|w|>1$ 上，把 $|z|=1$ 一对一地映照到 $|w|=1$ 上，因此，若 $|z|<1$，则

$$|w(z)|=\left|\frac{f(z)}{f^*(z)}\right|=\prod_{i=1}^{n}\left|\frac{z-a_i}{1-a_iz}\right|<1;$$

若 $|z|=1$，则 $|w(z)|=1$；若 $|z|>1$，则 $|w(z)|>1$。可见，引理是成立的。

定理 1 的证明 若(1)成立，$A_k(z)$ 是稳定的，据引理 1，则

$$|A_k(0)|<|A_k^*(0)|;$$

但是，$A_k(0)=a_k^k$，$A_k^*(0)=a_0^k$，因此

$$|a_k|=|a_k^k/a_0^k|<1。\qquad (3-47)$$

于是方程（3-45）给出

$$a_0^{k-1}=a_0^k-(a_k^k)^2/a_0^k=[(a_0^k)^2-(a_k^k)^2]/a_0^k>0。$$

注意到已经假定 $a_0^k>0$。由于 $A_k(z)$ 是稳定的，由引理 1，则当 $|z|\geqslant 1$ 时有

$$|A_k(z)|\geqslant|A_k^*(z)|。$$

将它与(3-47)式联立，我们得到，对 $|z|\geqslant 1$，有

$$|A_k(z)|>|\alpha_k|\cdot|A_k^*(z)|。$$

但是从(3-42)式中，我们发现，对$|z|\geqslant1$，有

$$|z|\cdot|A_{k-1}(z)|=|A_k(z)-\alpha_kA_k^*(z)|$$
$$\geqslant|A_k(z)|-|\alpha_k|\cdot|A_k^*(z)|>0。$$

这说明多项式$A_{k-1}(z)$在$|z|\geqslant1$上没有零点，因此$A_{k-1}(z)$的零点全在$|z|<1$内，故$A_{k-1}(z)$是稳定的。

若(2)成立，则

$$a_0^{k-1}=a_0^k-(a_k^k)^2/a_0^k=[(a_0^k)^2-(a_k^k)^2]/a_0^k>0。$$

因为已经假定$a_0^k>0$，所以我们得到

$$|\alpha_k|=|a_k^k/a_0^k|<1。$$

由(3-42)式即得

$$A_k(z)-\alpha_kA_k^*(z)=zA_{k-1}(z),\tag{3-48}$$

因此

$$z^kA_k(z^{-1})-\alpha_kz^kA_k^*(z^{-1})=z^{k-1}A_{k-1}(z^{-1}),$$

或

$$A_k^*(z)-\alpha_kA_k(z)=A_{k-1}^*(z)。\tag{3-49}$$

从(3-48)式和(3-49)式中消去$A_k^*(z)$，得到

$$A_k(z)=\frac{z}{1-\alpha_k^2}A_{k-1}(z)+\frac{\alpha_k}{1-\alpha_k^2}A_{k-1}^*(z),$$

由于$|\alpha_k|<1$，这种消去总是可能的。

因为$A_{k-1}(z)$是稳定的，据引理1，则对$|z|\geqslant1$有

$$|A_{k-1}(z)|\geqslant|A_{k-1}^*(z)|,$$

又因$|\alpha_k|<1$，因此，对$|z|\geqslant1$，我们有

$$|A_k(z)|\geqslant\left|\frac{z}{1-\alpha_k^2}\right|\cdot|A_{k-1}(z)|-\left|\frac{\alpha_k}{1-\alpha_k^2}\right|\cdot|A_{k-1}^*(z)|>0。$$

这说明多项式$A_k(z)$在单位圆的外部没有零点，因此它的零点全在单位圆内，故$A_k(z)$是稳定的。定理证毕。

在前面我们已经发现，$a_0^k>0$对一切k成立是$A(z)$为稳定的必要条件。我们现在证明其逆也是正确的。因此，假定一切a_0^k是正的。当$a_0^0>0$时，平凡多项式A_0是稳定的。定理1中的$A_1(z)$是稳定的。

重复应用定理 1，于是一切 $A_k(z)$ 是稳定的，因此 $A_n(z)$ 是稳定的。综上所述，我们证明了下述定理。

定理 2 设 $a_0^n>0$，则下列条件等价：

(1) $A_n(z)$ 是稳定的；

(2) $a_0^k>0$ 对 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 成立。

下面，我们将研究其实际的计算方法。为了研究 $A(z)$ 的稳定性，我们必须首先算出多项式 $A_k(z)$ 的系数。这件事很容易按照下面的表格来做到。

$$
\begin{array}{lllll}
\boldsymbol{a_0} & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\
a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\
\boldsymbol{a_0^{n-1}} & a_1^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1}, & \\
a_{n-1}^{n-1} & a_{n-2}^{n-1} & \cdots & a_0^{n-1} & \\
\vdots & \vdots & & & \\
\boldsymbol{aa_0^1} & a_1^1 & & & \\
a_1^1 & a_0^1 & & & \\
\boldsymbol{a_0^0} & & & &
\end{array}
$$

上述 A 的系数表（A 表）中，偶数行的元素是由将它前面一行的元素倒过来排列而得到的，奇数行的元素是利用公式(3-43)与(3-45)得到的：

$$a_i^{k-1}=a_i^k-\alpha_k a_{k-i}^k,\quad \alpha_k=a_k^k/a_0^k。$$

若所有的系数 $a_0^k(k=0,1,2,\cdots,n)$ 都是正的，则由定理 2 可知，多项式 $A(z)$ 是稳定的。这些元素 a_0^k 在上表中用粗体字书写。

例 3-14 试判别多项式 $A(z)=z^3+0.7z^2+0.5z-0.3$ 是否是稳定的。

解 按前面所述方法，我们得到下表：

					α_k
1	(a_0^3)	0.7	0.5	−0.3	
−0.3		0.5	0.7	1.0	−0.3
0.91	(a_0^2)	0.85	0.71		
0.71		0.85	0.91		0.780
0.356	(a_0^1)	0.187			
0.187		0.365			0.[illegible]5
0.258	(a_0^0)				0.258

可见所有 $a_0^k(k=0,1,2,3)$ 都是正的，故上述多项式是稳定的。

由于上述计算 $A_k(z)$ $(k=0,1,\cdots,n)$ 系数的计算表是由递推式确定的，因此，特别便利于用计算机来进行计算。

根据上述定理，对于一次、二次和三次多项式，我们列出其稳定的判据。

设 $A_1(z)=a_0z+a_1$，$a_0>0$，则 $A_1(z)$ 是稳定的判据是：

$$a_0^2-a_1^2>0。\tag{3-50}$$

设 $A_2(z)=a_0z^2+a_1z+a_2$，$a_0>0$，则 $A_2(z)$ 是稳定的判据是：

$$a_0^2-a_2^2>0,\tag{3-51}$$

$$(a_0^2-a_2^2)^2-a_1^2(a_0-a_2)^2>0。\tag{3-52}$$

设 $A_3(z)=a_0z^3+a_1z^2+a_2z+a_3$，$a_0>0$，则 $A_3(z)$ 是稳定的判据是：

$$a_0^2-a_3^2>0,\tag{3-53}$$

$$(a_0^2-a_3^2)^2-(a_0a_2-a_3a_1)^2>0,\tag{3-54}$$

$$\begin{aligned}(a_0^2-a_3^2)^3+(a_0a_2-a_3a_1)^2(2a_0^2-2a_3^2+a_1^2-a_2^2)+\\+(a_0a_1-a_3a_2)^2(a_0^2-a_2^2+2a_3a_1-2a_2a_0)<0。\end{aligned}\tag{3-55}$$

3.2 根全位于左半平面的判别法

上面我们讨论了首项系数大于零的实系数多项式的根全位于单位圆内的判据，现在我们来讨论这种多项式的根全部位于左半平面的判据。

设
$$A(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n,\ a_0>0\tag{3-56}$$
是实系数多项式。把 $A(z)$ 分成奇数项 $\overline{A}(z)$ 和偶数项 $\widetilde{A}(z)$，我们有

$$A(z)=\overline{A}(z)+\widetilde{A}(z),\tag{3-57}$$

其中

$$\overline{A}(z)=a_0z^n+a_2z^{n-2}+\cdots=\frac{1}{2}[A(z)+(-1)^nA(-z)],\tag{3-58}$$

$$\widetilde{A}(z)=a_1z^{n-1}+a_2z^{n-3}+\cdots=\frac{1}{2}[A(z)-(-1)^nA(-z)]。\tag{3-59}$$

令

$$A_k(z)=a_0^k z^k+a_1^k z^{k-1}+\cdots+a_k^k, \tag{3-60}$$

其中(3-60)式中的系数$a_i^k(i=0,1,2,\cdots,k-1)$的上角$k$表示上指标，而不是幂次。它们由方程

$$A_{k-1}(z)=A_k(z)-\alpha_k z\widetilde{A}_k(z) \tag{3-61}$$

递推地定义，其中

$$\alpha_k=a_0^k/a_1^k, \tag{3-62}$$

$$A_n(z)=A(z)。 \tag{3-63}$$

很明显，多项式$A_{k-1}(z)$仅当$a_1^k\neq 0$时才能有定义。我们将首先建立起关于这一点的充要条件。结果是，这个问题紧密地与多项式$A_k(z)$的稳定性相联系。我们有下述结果。

定理3 设$a_0^k>0$，则下列条件是等价的：

(1) 多项式$A_k(z)$的所有的零点都位于左半平面上；

(2) 多项式$A_{k-1}(z)$的所有零点都位于左半平面上，并且a_1^k是正的。

为了证明这个定理，我们将用到下述引理。

引理2 若实系数多项式$f(z)$的零点全部位于左半平面，则

$$|f(z)|<|f(-z)|, \qquad \mathrm{Re}z<0,$$

$$|f(z)|=|f(-z)|, \qquad \mathrm{Re}z=0,$$

$$|f(z)|>|f(-z)|, \qquad \mathrm{Re}z>0。$$

证明 由于多项式$f(z)$的零点全位于左半平面内，我们有

$$f(z)=\beta\prod_{i=1}^{n}(z-a_i),\quad \mathrm{Re}a_i<0(i=1,2,\cdots,n)。$$

由于实系数多项式的复根一定是成对共轭的，所以

$$f(-z)=\beta\prod_{i=1}^{n}(-z-a_i)=\beta\prod_{i=1}^{n}(-z-\overline{a_i})。$$

令

$$w(z)=\frac{f(z)}{f(-z)}=\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{z-a_i}{-z-\overline{a_i}}\right),$$

前面我们已经证明，分式线性变换

$$w_i(z)=\frac{a_i-z}{\overline{a_i}+z}$$

把左半平面一对一地映照到单位圆内，把虚轴映照到单位圆周，把右半平面单叶地映照到闭单位圆的外部，因此

$$w(z)=\prod_{i=1}^{n}w_i(z)=\prod_{i=1}^{n}\frac{a_i-z}{a_i+z}=\frac{f(z)}{f(-z)}$$

也具有同样的性质，故引理是成立的。

定理 3 的证明 设 $a_0^k>0$，又 $A_k(z)$的所有零点位于左半平面内。我们用反证法证明 $a_1^k>0$。若 $a_1^k<0$，取 $z=x>0$。并且 x 充分大，我们有

$$\left|\frac{A_k(x)}{A_k(-x)}\right|=\left|\frac{a_0^k+a_1^k x^{-1}+\cdots}{a_0^k-a_1^k x^{-1}+\cdots}\right|<1,$$

但是，据引理 2，当 $\mathrm{Re}z>0$ 时，$|A_k(z)|>|A_k(-z)|$，这是矛盾的，故 $a_1^k<0$ 是不可能的。设 $a_1^k=0$。若所有的偶数项系数全等于零，即 $\widetilde{A}_k(z)\equiv0$，则 $A_k(z)=\overline{A}_k(z)$，于是，对 $z=x>0$，无论 n 是偶数或是奇数，我们有 $|A_k(x)|=|A_k(-x)|$，故

$$|A_k(x)|=|A_k(-x)|。$$

这与引理 2 的结论 $|A_k(x)|>|A_k(-x)|$ 是相矛盾的，故偶数项系数不可能全都等于零，即 $\widetilde{A}_k(z)\neq0$，不妨假设第一个不等于零的偶数项的系数是 a_3^k。若 $a_3^k<0$，取 $z=x>0$ 并且充分大，则我们有

$$\left|\frac{A_k(x)}{A_k(-x)}\right|=\left|\frac{a_0^k+a_2^k x^{-2}+a_3^k x^{-3}+a_4^k x^{-4}+\cdots}{a_0^k+a_2^k x^{-2}-a_3^k x^{-3}+a_4^k x^{-4}+\cdots}\right|<1,$$

这是不可能的。若 $a_3^k>0$，取 $z=x+iy$，$0<x\leqslant M<+\infty$，$y\to\infty$，则

$$\left|\frac{A_k(z)}{A_k(-z)}\right|^2=\left|\frac{[a_0^k-a_2^k(y^2-x^2)r^{-4}]^2-2a_0^k a_3^k(3xy^2-x^3)r^{-6}+\cdots}{[a_0^k-a_2^k(y^2-x^2)r^{-4}]^2+2a_0^k a_3^k(3xy^2-x^3)r^{-6}+\cdots}\right|$$

$$<1,$$

其中 $r^2=x^2+y^2$，这是与引理 2 相矛盾的。故 $a_1^k>0$。

现在证明 $A_{k-1}(z)$的所有零点全位于左半平面。(3-59) 式和 (3-61)式给出

$$A_{k-1}(z)=\left(1-\frac{a_k z}{2}\right)A_k(z)+(-1)^k\frac{a_k z}{2}A_k(-z)。\qquad(3\text{-}64)$$

多项式 $A_{k-1}(z)$是 $k-1$ 阶的。若我们能证明倒数多项式

$$A_{k-1}^*(z)=z^{k-1}A_{k-1}(z^{-1})=z^{-2}\left[\left(z-\frac{a_k}{2}\right)A_k^*(z)\right.$$

$$\left.+\frac{a_k}{2}(-1)^kA_k(-z)\right] \tag{3-65}$$

的全部零点位于左半平面内，则 $A_{k-1}(z)$的全部零点也位于左半平面内，因为若 $\mathrm{Re}z<0$, 则 $\mathrm{Re}z^{-1}=\mathrm{Re}(\bar{z}/|z|^2)<0$。为此，我们考虑函数

$$F(z,a)=z^{-1}\left[\left(z-\frac{a}{2}\right)A_k^*(z)+\frac{a}{2}(-1)^kA_k^*(-z)\right], \tag{3-66}$$

其中 $0\leqslant a\leqslant a_k$。注意到

$$F(z,a)=zA_{k-1}^*(z), \tag{3-67}$$

由于 $A_k(z)$的零点全部位于左半平面，$A_k^*(z)=z^kA_k(z^{-1})$，所以，$A_k^*(z)$的全部零点都位于左半平面。因而，由引理 2，即得

$$|A_k^*(z)|\geqslant|A_k^*(-z)|,\quad \mathrm{Re}z\geqslant0。$$

选取 z 使得$\mathrm{Re}z\geqslant0$，并且

$$\left|z-\frac{a}{2}\right|>\left|\frac{a}{2}\right|,$$

于是，由三角不等式，即得

$$|F(z,a)|=|z|^{-1}\left|\left(z-\frac{a}{2}\right)A_k^*(z)+\frac{a}{2}(-1)^kA_k^*(-z)\right|$$

$$\geqslant|z^{-1}|\left[\left|z-\frac{a}{2}\right|\cdot|A_k^*(z)|-\left|\frac{a}{2}\right|\cdot|A_k^*(-z)|\right]>0。$$

这样，我们发现，函数$F(z,a)$在下述区域（图 3.15）

$$\mathscr{D}=\left\{z\in\mathscr{C},\ \mathrm{Re}z\geqslant0,\ \left|z-\frac{a}{2}\right|>\left|\frac{a}{2}\right|\right\} \tag{3-68}$$

中没有零点。我们将由此证明$F(z,a)$在右半平面上没有零点。因为$F(z,a)$关于 a 是连续的，因而它的零点关于 a 也是连续的。对 $a=0$，我们有

$$F(z,0)=A_k^*(z),$$

于是，我们发现，$F(z,a)$的零点全部位于左半平面内。由于 $F(z,a)$在

上述区域$\mathscr{D}$内没有任何零点，因而，当α增大时，对$z\neq0$，没有一个零点将越过虚轴。在右半平面上有零点的唯一可能性是：当α增大时在原点有一个零点进入右半平面。但是

$F(0,\alpha)=a_0-\alpha a_1>0,\ 0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_k$。因此，当$\alpha$增大时，对$\alpha=a_0/a_1=\alpha_k$，$F(z,\alpha)$将在原点处有一个零点。这是一个简单零点，因为$F'(0,\alpha)=a_1>0$。函数$F(z,\alpha_k)$仅在原点处有一个零点，而其它零点则全在左半平面上。由方程(3-67)可知，$A_{k-1}^*(z)$，因而$A_{k-1}(z)$的零点全部在左半平面上。

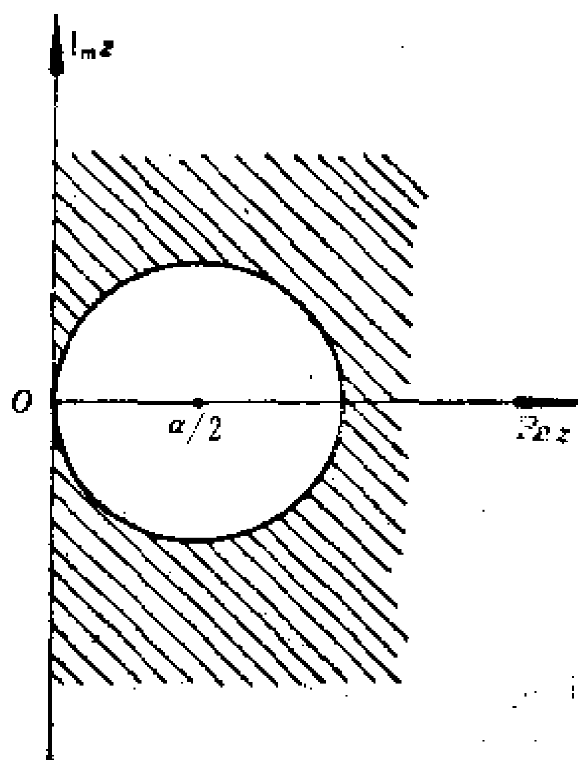


图 3.15

反之，若$A_{k-1}(z)$的零点全部在左半平面上，又若a_1^k和a_0^k都是正的，那么，由(3-59)和式(3-61)式给出

$$A_{k-1}(z)=\left(1-\frac{\alpha_k z}{2}\right)A_k(z)+(-1)^k\frac{\alpha_k z}{2}A_k(-z),$$

$$A_{k-1}(-z)=\left(1+\frac{\alpha_k z}{2}\right)A_k(-z)-(-1)^k\frac{\alpha_k z}{2}A_k(z)。$$

由这两大方程消去$A_k(-z)$，得到

$$A_k(z)=\left(1+\frac{\alpha_k z}{2}\right)A_{k-1}(z)-(-1)^k\frac{\alpha_k z}{2}A_{k-1}(-z)。$$

由于a_0^k和a_1^k都是正的，所以$\alpha_k>0$。对于$\mathrm{Re}z\geqslant0$，我们有

$$\left|1+\frac{\alpha_k z}{2}\right|>\left|\frac{\alpha_k z}{2}\right|,\quad \mathrm{Re}z\geqslant0。$$

因为$A_{k-1}(z)$的零点全在左半平面上，由引理2，则

$$|A_{k-1}(z)|\geqslant|A_{k-1}(-z)|,\quad \mathrm{Re}z\geqslant0,$$

联立上述两个不等式，我们发现

$$\left|1+\frac{\alpha_k z}{2}\right||A_{k-1}(z)>\left|\frac{\alpha_k z}{2}\right||A_{k-1}(-z)|,\quad \mathrm{Re}z\geqslant 0。$$

因此，对于 $\mathrm{Re}z\geqslant 0$，有

$$\begin{aligned}|A_k(z)|&=\left|\left(1+\frac{\alpha_k z}{2}\right)A_{k-1}(z)-(-1)^k\frac{\alpha_k z}{2}A_{k-1}(-z)\right|\\&\geqslant\left|1+\frac{\alpha_k z}{2}\right||A_{k-1}(z)|-\left|\frac{\alpha_k z}{2}\right||A_{k-1}(-z)>0。\end{aligned}$$

这说明多项式 $A_k(z)$ 在闭右半平面上没有零点，故 $A_k(z)$ 的零点全部位于左半平面。至此，定理证毕。

重复应用定理 3，我们发现，若多项式 $A(z)$ 的零点全部位于左半平面，则一切多项式 $A_k(z)$，$k=n-1$，$n-2$，…，0的零点也全部位于左半平面，并且所有的系数 a_1^k 是正的。反之，若所有的系数 $a_1^k>0$，则我们发现多项式 $A(z)$ 的所有零点都位于左半平面。因此我们有下述定理 4。

定理 4（劳斯定理） 设 $a_0^k>0$，则下列条件是等价的：

（1） 多项式 $A(z)$ 的零点全位于左半平面；

（2） 所有的系数 a_1^k 都是正的。

为了检验多项式 $A(z)$ 的零点是否全部位于左半平面内，我们必须首先计算多项式 $A_k(k=0,1,2,\cdots,n-1)$ 的系数，利用下列表容易做到这一点。

a_0^n	a_1^n	a_2^n	a_3^n	a_4^n	…
a_1^n	0	a_3^n	0	a_5^n	…
	a_0^{n-1}	a_1^{n-1}	a_2^{n-1}	a_3^{n-1}	…
	a_1^{n-1}	0	a_3^{n-1}	0	…
		⋮			
		a_0^2	a_1^2	a_2^2	
		a_1^2	0		
			a_0^1	a_1^1	
			a_1^1	0	
				a_0^0	

a_i^k 系数表中的每一偶数行中的元素是由前一行的元素往左提前一步，并令偶数位置的元素为零而构成的。奇数行中的元素 a_i^{k-1} 是两个元素 a_{i+1}^k, a_i^k 按下述公式构成的：

$$a_i^{k-1}=\begin{cases} a_{i+1}^k, & i\text{ 是偶数}, \quad i=0,1,\cdots,k-1; \\ a_i^k-\alpha_k\ a_{i+1}^k, & i\text{ 是奇数}, \ \alpha_k=a_0^k/a_1^k。\end{cases}$$

它们是由 (3-61)式中比较 z 的同次幂的系数而得到的。

根据劳斯判别法（定理 4），若一切系数 a_1^k 是正的，则多项式 $A(z)$ 的所有零点全位于左半平面。

由于计算是由递推地确定的，所以容易用算法语言来实现。

根据上述定理，现列出一次、二次和三次多项式的根全位于左半平面的判据。

设 $A(z)=a_0z+a_1$ 是实系数多项式，$a_0>0$，则 $A(z)$ 的根位于左半平面的据判是：

$$a_1>0。\tag{3-69}$$

设 $A(z)=a_0z^2+a_1z+a_2$ 是实系数多项式，$a_0>0$，则 $A(z)$ 的根全部位于左半面的判据是：

$$\begin{cases} a_1>0, \\ a_1^2-a_0a_2>0。\end{cases}\tag{3-70}$$

设 $A(z)=a_0z^3+a_1z^2+a_2z+a_3$ 是实系数多项式，$a_0>0$，则 $A(z)$ 的根全部位左半平面的判据是：

$$\begin{cases} a_1>0, \\ a_1^2-a_0a_2>0, \\ a_3(a_1a_2-a_0a_3)>0。\end{cases}\tag{3-71}$$

顺便指出，原来的霍尔维茨判别法是：

设 $A(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$ 是实系数多项式。$a_0>0$，则要使多项式 $A(z)$ 的所有的根都具有负的实部的充要条件为下列不等式成立：

$$D_1=a_1>0, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}>0, \qquad D_3=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}>0,$$

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & & \cdots 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 0 & \cdots & \cdots 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & \cdots & \cdots & \cdots a_n \end{vmatrix}>0, \qquad (3\text{-}72)$$

其中我们假定当 $k>n$ 时，$a_k=0$。

综上所述，霍尔维茨判别法与劳斯判别法虽然结论是相同的，但判据的表述形式不同；对高阶多项式来说，劳斯方法计算起来虽较方便，但其判据与系数的关系式是隐式的，不像霍尔维茨判据那样一目了然。

例 3-1 试证明多项式

$$A(z)=1+bz+\frac{1}{2!}z^2+\frac{b}{3!}z^3+\frac{1}{4!}z^4+\frac{b}{5!}z^5$$

在右半平面 $\mathrm{Re}z>0$ 上至少有一个根。

证明 事实上，对上述多项式，根据霍尔维茨判据，我们经计算得：

$$a_0=b/120>0, \quad D_1=a_1=\frac{1}{24}>0,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} \frac{1}{24} & \frac{b}{120} \\ \frac{1}{2} & \frac{b}{6} \end{vmatrix}=b\left(\frac{1}{24\times 6}-\frac{1}{2\times 120}\right)=\frac{2b}{24\times 30}>0,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} \frac{1}{24} & \frac{b}{120} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{b}{6} & \frac{1}{24} \\ 1 & b & \frac{1}{2} \end{vmatrix}=\frac{b}{24\times 6\times 2}+\frac{b}{24\times 120}-\frac{b}{24\times 4}-\frac{b}{4\times 120}$$

$$=b\left(\frac{11}{2880}-\frac{1}{480}-\frac{1}{576}\right)$$

$$=b\left(\frac{11}{2880}-\frac{5+6}{2880}\right)=0。$$

因此，根据霍尔维茨判据的必要性，$A(z)$ 在闭右半平面 $\mathrm{Re}z\geqslant 0$ 上至少有一个根。但是，由于在虚轴，$z=\mathrm{i}y$，则

$$A(\mathrm{i}y)=1+\mathrm{i}by-\frac{1}{2!}y^2-\mathrm{i}\frac{b}{3!}y^3+\frac{1}{4!}y^4+\mathrm{i}\frac{1}{5!}y^5,$$

显然，$A(z)$在虚轴上没有纯虚根，因此，$A(z)$在右半平面上至少有一个根。

习　题

1. 函数 $A(z)=z^2+0.4z+0.1$ 的零点是否全在单位圆内？

2. 函数 $A(z)=z^6+3z^5+5z^4+12z^3+6z^2+9z+1$ 的零点是否全在左半平面上？

第四章　共形映照及其一些应用

§1　初等共形映照

1.1　导数的几何意义

设函数 $w=f(z)$ 在区域 $\mathscr{D}$ 内是解析的，$z_0\in\mathscr{D}$，$f'(z_0)\neq 0$。设 $\gamma(t)$ 是过点 z_0 的一条光滑弧线，$0\leqslant t\leqslant 1$，$\gamma(0)=z_0$，$\gamma(t)$ 在点 z_0 的切线与实轴的夹角为 $\operatorname{Arg}\gamma'(0)$。$f(z)$ 把 $\gamma(t)$ 映照成过点 $w_0=f(z_0)$ 的光滑弧线 $\sigma(t)=f[\gamma(t)]$，这是因为 $f'(z_0)\neq 0$；并且 $\sigma'(t)=f'[\gamma(t)]\gamma'(t)$，$\sigma'(0)=f'(z_0)\gamma'(0)$。$\sigma(t)$ 的切线与实轴的夹角为

$$\operatorname{Arg}\sigma'(0)=\operatorname{Arg}f'(z_0)+\operatorname{Arg}\gamma'(0),$$

或写成

$$\operatorname{Arg}\sigma'(0)-\operatorname{Arg}\gamma'(0)=\operatorname{Arg}f'(z_0),$$

这说明：$\sigma(t)$ 在点 w_0 处的切向量的幅角与 $\gamma(t)$ 在点 z_0 处切向量的幅角之差总是等于 $\operatorname{Arg}f'(z)$，而与 $\gamma(t)$ 无关（图 4.1）。因此，如果考

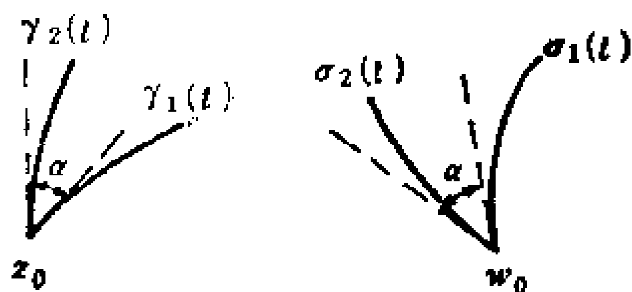


图　4.1

虑过点 z_0 的任意两条光滑弧线 $\gamma_1(t)$，$\gamma_2(t)$，$0\leqslant t\leqslant 1$，$\gamma_1(0)=\gamma_2(0)=z_0$，它们在 $w=f(z)$ 的映照下分别被映照成通过 $w_0=f(z_0)$ 的光滑弧线 $\sigma_1(t)$，$\sigma_2(t)$，则由上所述，有

$$\operatorname{Arg}\sigma_2'(0)-\operatorname{Arg}\gamma_2'(0)=\operatorname{Arg}\sigma_1'(0)-\operatorname{Arg}\gamma_1'(0),$$

即

$$\operatorname{Arg}\sigma_2'(0)-\operatorname{Arg}\sigma_1'(0)=\operatorname{Arg}\gamma_2'(0)-\operatorname{Arg}\gamma_1'(0)。\qquad(4\text{-}1)$$

其中左端表示 $\sigma_1(t)$ 与 $\sigma_2(t)$ 在点 $w_0=f(z_0)$ 处的夹角，右端表示 $\gamma_1(t)$ 与 $\gamma_2(t)$ 在点 z_0 处的夹角。(4-1)式说明：在 $w=f(z)$ 的映照下，在导数不为零的点，任何两条光滑弧线间的夹角的大小和旋转方向都是保持不变的。这时，称 $f(z)$ 在点 z_0 是**保角的**。

以上是导数的几何意义，关于导数模的几何意义是明显的。由于

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0),$$

显然

$$\lim_{z\to z_0}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}=|f'(z_0)|,$$

即
$$|f(z)-f(z_0)|=|f'(z_0)|\cdot|z-z_0|+o(|z-z_0|)。\tag{4-2}$$

其中 $o(|z-z_0|)$ 是关于 $|z-z_0|\to 0$ 的高阶无穷小量。上式表示：在相差一个高阶无穷小量的程度内，$w=f(z)$ 将无穷小圆周映照成无穷小圆周，这时称 $f(z)$ 在点 z_0 具有**保圆性**。

综上所述，若 $f'(z_0)\neq 0$，则映照 $w=f(z)$ 在点 z_0 具有下述性质：

(1) 在相差一个高阶无穷小量的程度内，它把无穷小圆周变换成无穷小圆周（保圆周性）；

(2) 在点 z_0 处曲线间所成的角度保持不变（保角性）。

我们称 $f(z)$ 在点 z_0 处是**共形的**。

设函数 $w=f(z)$ 在区域 $\mathscr{D}$ 内是单叶、解析的，则称 $f(z)$ 是区域 $\mathscr{D}$ 内的单叶**共形映照**。以后我们会知道这种函数的导数 $f'(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 内处处不等于零。

下面，我们将讨论一些最简单的共形映照。

1.2 分式线性映照

具有下述形式的函数称为**分式线性函数**或**分式线性映照**：

$$w=L(z)=\frac{az+b}{cz+d},\tag{4-3}$$

其中 a,b,c,d 是复常数，且

$$\Delta=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc\neq 0。\tag{4-4}$$

当 $\Delta=ad-bc=0$ 时，$L(z)$将是常数，所以，以下我们总是假定分式线性函数(4-3)满足条件(4-4)。

若 $c\neq 0$，则除去点 $z=-d/c$ 外，$L(z)$是解析的，我们规定点 $z=-d/c$ 对应于无穷远点 ∞；若 $c=0$，则由(4-4)式，$ad\neq 0$，$L(z)=Az+B$，其中 $A=a/d, B=b/d$。这时，$L(z)$是一个线性函数，它将无穷远点 ∞ 对应于 ∞。

分式线性映照(4-3)的反函数

$$z=L^{-1}(w)=\frac{-dw+b}{cw-a} \tag{4-5}$$

也是一个分式线性映照。若 $c\neq 0$，我们规定点 $w=a/c$ 对应于点 $z=\infty$；若 $c=0$，则点 $z=\infty$ 对应于 $w=\infty$。于是，分式线性映照 $w=L(z)$ 建立了从扩充复平面 $\overline{\mathscr{C}}$ 上的点到扩充复平面 $\overline{\mathscr{C}}$ 上的点的一一对应，即 $L(z)$ 把 $\overline{\mathscr{C}}$ 单叶地映照到 $\overline{\mathscr{C}}$。

若 $c\neq 0$，则 $L(z)$的导数为

$$L'(z)=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}。$$

所以在除去点 $z=-d/c$ 和 $z=\infty$ 外，$L'(z)\neq 0$，分式线性映照是共形的；若 $c=0$，则 $L(z)=Az+B, L'(z)=A\neq 0$，所以 $L(z)$ 在复平面上是共形的。

设 γ 是以点 a 为圆心、R 为半径的圆周，设 z_1 和 z_2 两点满足条件

$$z_2-a=R^2/\overline{(z_1-a)}, \tag{4-6}$$

则称 z_1, z_2 是**关于圆周 γ 的两个对称点**（图 4.2）。特别地，对于圆周

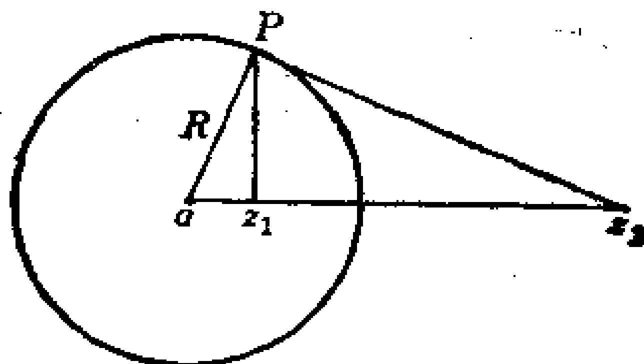


图 4.2

γ 上的点，和它的对称点就是其自身；圆心 $z=a$ 和无穷远点 $z=\infty$ 也看作是关于 γ 的两个对称点。(4-6)式表明，两个对称点 z_1 与 z_2 都位于同一条通过点 a 的射线上，并且 $|z_1-a|\cdot|z_2-a|=R^2$。

为了证明分式线性映照的性质的需要，我们来证明下述命题。

命题 任意一个圆周都可以表示为

$$\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=k, \tag{4-7}$$

其中 k 是正实数，z_1 与 z_2 是关于它的两个对称点。当 $k\neq1$ 时，这个圆周的圆心和半径 R 分别为

$$a=\frac{z_1-k^2z_2}{1-k^2}, \qquad R=\frac{k|z_1-z_2|}{|1-k^2|}。 \tag{4-8}$$

证明 设 z_1, z_2 是某个圆周 $\gamma: |z-a|=R$ 的两个对称点，$z_1\neq z_2$，$z_1=a+\rho_1e^{i\alpha}, z_2=a+\rho_2e^{i\alpha}, \rho_1\rho_2=R^2$。当 $z\in\gamma$ 时，$z=a+Re^{i\theta}$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，我们有

$$\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=\left|\frac{Re^{i\theta}-\rho_1e^{i\alpha}}{Re^{i\theta}-\rho_2e^{i\alpha}}\right|=\frac{\rho_1}{R}\left|\frac{Re^{i\theta}-\rho_1e^{i\alpha}}{\rho_1e^{i\theta}-Re^{i\alpha}}\right|=\frac{\rho_1}{R}=\frac{R}{\rho_2}\neq1,$$

可见圆周上的点满足方程(4-7)，其中 $k=\rho_1/R=R/\rho_2\neq1$。另外，由于

$$z_1-k^2z_2=a(1-k^2)+e^{i\alpha}(\rho_1-k^2\rho_2)=a(1-k^2),$$

$$|z_1-z_2|=|e^{i\alpha}(\rho_1-\rho_2)|=R\left|\frac{\rho_1}{R}-\frac{\rho_2}{R}\right|=R\left|k-\frac{1}{k}\right|,$$

可见(4-8)式也满足。

反之，若 z 满足方程(4-7)，其中 $k\neq1$，即 $|z-z_1|=k|z-z_2|$，由于对任何复数 ζ_1, ζ_2，有

$$|\zeta_1-k^2\zeta_2|^2-k^2|\zeta_1-\zeta_2|^2=(1-k^2)(|\zeta_1|^2-k^2|\zeta_2|^2),$$

把这关系式应用于 $\zeta_1=z-z_1, \zeta_2=z-z_2$，则有

$$|(z-z_1)-k^2(z-z_2)|^2=k^2|(z-z_1)-(z-z_2)|^2,$$

即

$$|(1-k^2)z-(z_1-k^2z_2)|=k|z_1-z_2|。$$

上式两边除以 $|1-k^2|$，便得到

$$\left|z-\frac{z_1-k^2z_2}{1-k^2}\right|=\frac{k|z_1-z_2|}{|1-k^2|},$$

即
$$|z-a|=R_{\circ}$$
其中a和R正如(4-8)式所定义的：
$$a=\frac{z_1-k^2z_2}{1-k^2},\qquad R=\frac{k|z_1-z_2|}{|1-k^2|}。$$
于是，易知
$$z_1-a=\frac{k^2}{1-k^2}(z_2-z_1),\quad z_2-a=\frac{1}{1-k^2}(z_2-z_1),$$
$$z_2-a=\frac{R^2}{\overline{z_1-a}}。$$
所以z_1,z_2是关于圆周$|z-a|=R$的两个对称点。

当$k=1$时，分程(4-7)退化成
$$\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=1。$$
显然，它表示一条直线l, z_1, z_2是关于l的两个对称点（图 4.3)。

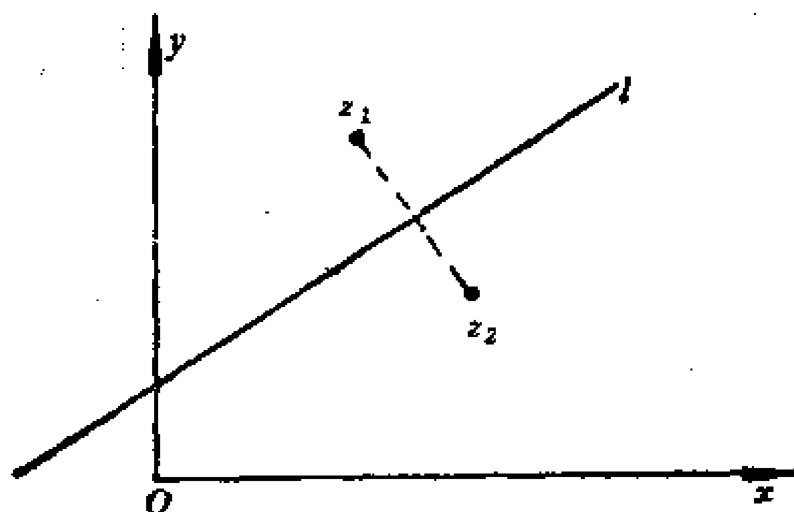


图 4.3

如果把复平面$\mathscr{C}$上的直线看作是扩充复平面上经过无穷远点$z=\infty$的圆周，那么，对任意实数$k>0$,在扩充复平面上，方程(4-7)都表示一个圆周。而且，当且仅当$k=1$时，(4-7)式表示这个圆周经过点$z=\infty$，即为一条直线。

现在，我们可以利用上述命题来证明分式线性映照的下述重要性质。

定理 1 任意分式线性映照

$$w=L(z)=\frac{az+b}{cz+d}\ (ad-bc\neq 0)$$

将圆周 K 映照成圆周 H，并且把关于 K 的两个对称点映照成关于 H 的两个对称点。

证明 设 z_1, z_2 是关于圆周 K 的两个对称点，$z_1\neq z_2$，则圆周 K 可表示为

$$\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=k \quad (k>0)。$$

将 $z=L^{-1}(w)=\dfrac{-dw+b}{cw-a}$ 代入上述方程，得到

$$\left|\frac{\dfrac{-dw+b}{cw-a}-z_1}{\dfrac{-dw+b}{cw-a}-z_2}\right|=k,$$

即

$$\left|\frac{(cz_1+d)w-(az_1+b)}{(cz_2+d)w-(cz_2+b)}\right|=k。\tag{4-9}$$

若 $cz_1+d\neq 0, cz_2+d\neq 0$，那么由(4-9)式得到

$$\left|\frac{w-w_1}{w-w_2}\right|=h,$$

其中

$$w_1=L(z_1)=\frac{az_1+b}{cz_1+d}, \qquad w_2=L(z_2)=\frac{az_2+b}{cz_2+d},$$

$$h=\left|\frac{cz_2+d}{cz_1+d}\right|k。$$

由上述命题，$H:\left|\dfrac{w-w_1}{w-w_2}\right|=h$ 是一个圆周，z_1, z_2 两点的映像 w_1, w_2 是关于 H 的两个对称点。若 $cz_1+d=0$，那么 $cz_2+d\neq 0, az_1+b\neq 0$，因为只有 $z_1=-d/c$ 对应于 $w=\infty$。由(4-9)式得到

$$\left|\frac{az_1+b}{w(cz_2+d)-(cz_2+b)}\right|=k,$$

即

$$|w-w_2|=\frac{|az_1+b|}{k|cz_2+d|}。$$

这是 w-平面上以点 w_2 为圆心的圆周，点 $w_1=\infty$（点 z_1 的像）与点 w_2 是关于这个圆周的对称点。若 $cz_2+d=0$，那么，$cz_1+d\neq 0$，$az_2+b\neq 0$，由（4-9）式得到

$$|w(cz_1+d)-(az_1+b)|=k|az_2+b|,$$

即
$$|w-w_1|=k\left|\frac{az_2+b}{cz_1+d}\right|。$$

这是 w-平面上以 w_1 为圆心的圆周，w_1 与 $w_2=\infty$（点 z_1 的像）是关于这个圆周的对称点。定理证毕。

综上所述，任意一个分式线性函数

$$w=\frac{az+b}{cz+d},\quad ad-bc\neq 0$$

有下列性质：(1) 它是把扩充 z-平面映照到扩充 w-平面上的单叶共形映照；

(2) 把扩充 z-平面上的任何一个圆周都映照成扩充 w-平面上的一个圆周（保存圆周性质）；

(3) 把关于圆周 K 对称的任何一对点，都映照成关于圆周 K 的像对称的一对点（保存对称点性质）。

现在，我们来讨论分式线性函数 (4-3) 的不动点。一个分式线性函数 $L(z)=(az+b)/(cz+d)$，$ad-bc\neq 0$，除去 $L(z)$ 恒同于 z 外（$a=d=1$，$b=c=0$），它的不动点，即使得 $L(z)=z$ 的点至多只有两个，这是因为方程 $L(z)=z$，即

$$cz^2+(d-a)z-b=0$$

至多只有两个根：当 $c\neq 0$ 时，它恰有两个不动点（可能重合），当 $c=0$ 时，$L(z)=Az+B$，若 $A\neq 1$，则方程 $Az+B=z$ 的根 $z_1=-B/(A-1)$ 及 $z_2=\infty$ 是 $L(z)$ 的不动点；若 $A=1$，则 $L(z)=z+B$，它是一个平移，仅以 $z=\infty$ 为不动点。

定理 2 设 z_1,z_2 和 z_3 是扩充 z 平面上任意给定的三个不同点，w_1,w_2 和 w_3 是扩充 w 平面上任意给定的三个不同点，则存在唯一的一个分式线性函数 $L(z)$，使得

$$L(z_j)=w_j\quad (j=1,2,3)。$$

证明 为了要建立一个满足上述条件的映照，我们考虑一个辅助的 ζ 平面，易见

$$\zeta=\frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1},\quad \zeta=\frac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}$$

分别将 z_1,z_2,z_3 和 w_1,w_2,w_3 映照成 $0,1,\infty$。从这两个方程中消去 ζ，得到

$$\frac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}。\tag{4-10}$$

它是一个把点 z_1,z_2 与 z_3 分别映照成 w_1,w_2 与 w_3 的一个分式线性映照，记作 $L(z)$。

我们证明这种分式线性映照是唯一的。设分式线性映照 $L_1(z)$ 使得 $L_1(z_j)=w_j(j=1,2,3)$。考虑复合映照

$$\zeta=L_1^{-1}[L(z)]。$$

显然这是一个分式线性函数，并且使得 $\zeta(z_j)=z_j(j=1,2,3)$。因此，$L_1^{-1}[L(z)]\equiv z$，故 $L_1(z)\equiv L(z)$。

从这个定理可以导出下述定理 3。

定理 3 对扩充 z-平面上的任何一个圆，都可以找一个分式线性映照将它映照成扩充 w-平面上的任何一个圆。

事实上，我们只要在扩充 z-平面中的那个圆域 $\mathscr{K}$ 的边界 K 上任取三点 z_1,z_2 与 z_3，使得在圆周上从 z_1 到 z_2，从 z_2 到 z_3 的方向关于那个圆域来说是反时针方向（即正方向）。另外，在扩充 w-平面上的圆域 $\mathscr{H}$ 的圆周 H 上也任取三点 w_1,w_2,w_3，同样地，它们关于这个圆周也是按反时针方向排列，并且按照公式（4-10）建立一个分式线性映照，那么，根据分式线性映照的性质，这个映照一定把圆周 K 映照成圆周 H，并且把圆域 $\mathscr{K}$ 映照成圆域 $\mathscr{H}$，因为共形映照具有保方向性。

现在来研究分式线性映照的几个重要例子。

一、把上半平面映照成单位圆

设已经给定上半平面内的一个点 a，它将被映照成 $w=0$，根据分式线性函数的保存对称点的性质，点 a 关于实轴的对称点 $\overline{a}$ 将对应于 $w=\infty$，因此，所求的映照应当是

$$w=k\frac{z-a}{z-\bar{a}} \tag{4-11}$$

的形状，其中 k 是一个常数因子。由于这映照要把实轴上的点映照到单位圆周 $|w|=1$ 上，特别地，$z=0$ 的像应在 $|w|=1$ 上，因此

$$1=\left|k\frac{a}{\bar{a}}\right|=|k|。$$

故函数

$$w=e^{i\alpha}\frac{z-a}{z-\bar{a}} \tag{4-12}$$

就是我们所要求的映照，其中 α 是任何一个实数。

根据定理1，分式线性函数（4-12）将上半 z-平面上关于以 a 和 $\bar{a}$ 为对称点的圆周族 $\left|\frac{z-a}{z-\bar{a}}\right|=k(k<1)$，映照成 w-平面上的同心圆周族 $|w|=k$，把位于上半 z 平面上的通过点 a 和 $\bar{a}$ 的那些圆周弧族映照成 $|w|<1$ 内的半径束（参看图 4.4）。

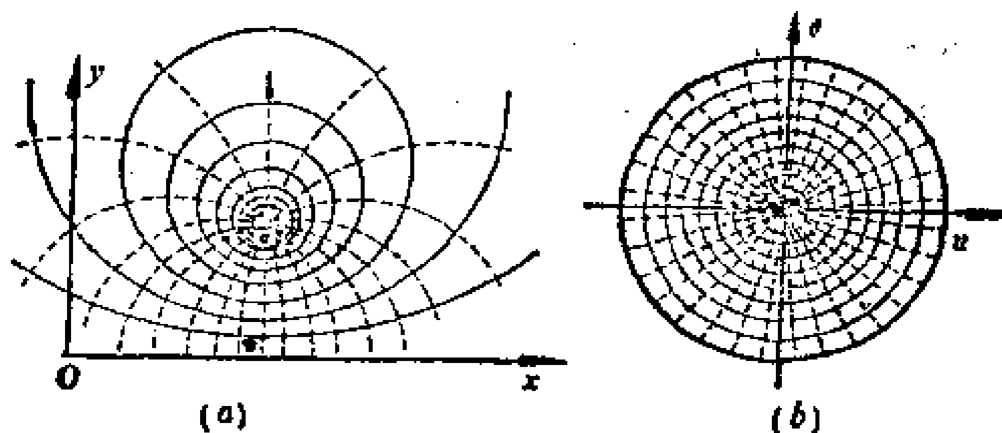


图 4.4

二、把单位圆映照成单位圆

设已知 $|z|<1$ 的一个点 a 被映照为 $|w|<1$ 的圆心，于是点 a 关于单位圆周 $|z|=1$ 的对称点 $1/\bar{a}$ 将被映照成无穷远点 $w=\infty$，因此，所求的映照应当是

$$w=k\frac{z-a}{z-1/\bar{a}}=k_1\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

的形状，其中 k_1 是一个复常数。由于这个映照应把 $|z|=1$ 映照成 $|w|=1$ 上，特别地，$z=1$ 的像应在 $|w|=1$ 上，即

$$\left|k_1\frac{1-a}{1-\bar{a}}\right|=|k_1|=1,$$

因此，可以取 $k_1=e^{i\alpha}$，故函数

$$w=e^{i\alpha}\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \tag{4-13}$$

就是我们所要求的映照，其中 a 是任何一个实数。

根据定理 1，在这个分式线性映照下，单位圆 $|z|<1$ 内以 a 和 $1/\bar{a}$ 两个点为对称点的圆族 $\left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|=k(k<1)$ 被映照成同心圆族 $|w|=k$，位于 $|z|<1$ 内的通过 a 和 $1/\bar{a}$ 的那些圆弧被映照成 $|w|<1$ 内的半径束（参看图 4.5）。

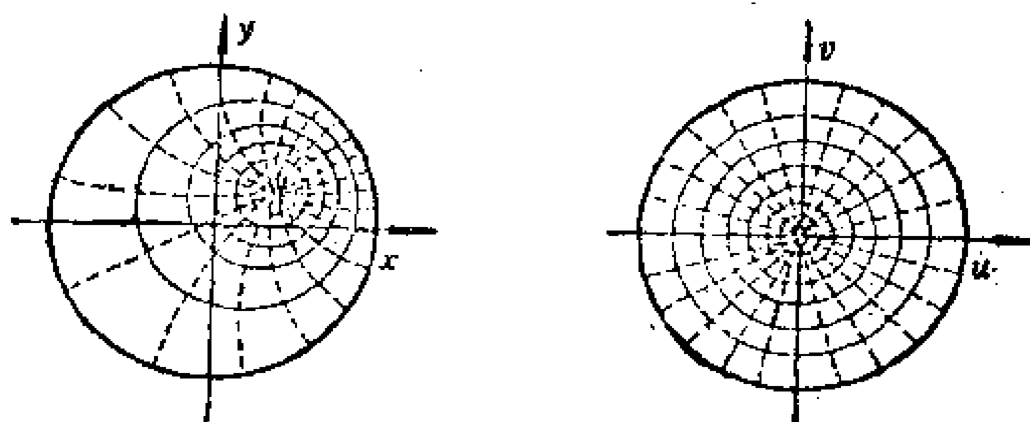


图 4.5

三、把圆周映照成圆周

读者容易证明：变换

$$w=\frac{\rho(z-a)}{\rho^2-\bar{a}z} \tag{4-14}$$

将圆周 $|z|=\rho$ 映照成圆周 $|w|=1$。若 $|a|<\rho$，则它将 $|z|<\rho$ 映照到 $|w|<1$ 上，而将 $|z|>\rho$ 映照到 $|w|>1$ 上。若 $|a|>\rho$，则它将 $|z|>\rho$ 映照到 $|w|<1$ 上，而将 $|z|<\rho$ 映照到 $|w|>1$ 上。

四、把圆弧三角形映照成直线三角形

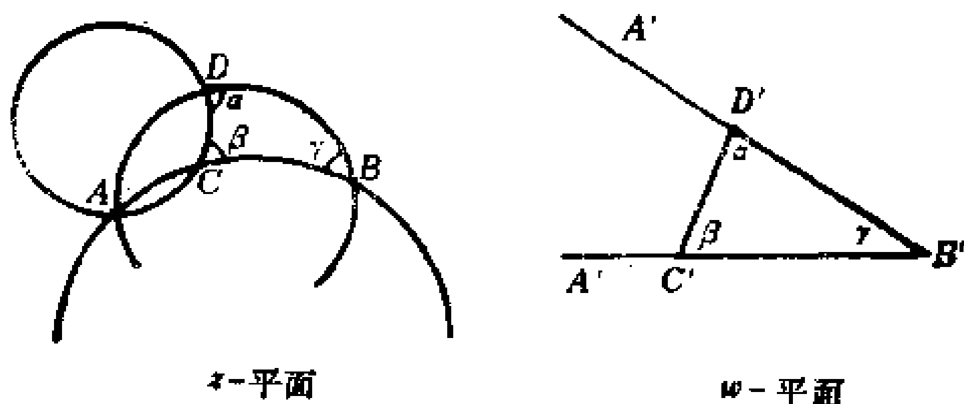


图 4.6

考虑 z–平面上交于点 $z=a$ 的三条圆弧（参看图 4.6）

其中圆弧三角形 BCD 的三内角的关系为 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$。考虑变换

$$w=k\frac{z-b}{z-a}, \tag{4-15}$$

它将点 $A(z=a)$映照成 $w=\infty$，而将点 $B(z=b)$映照成 $w=0$。根据分式线性变换的性质，变换（4–15）将圆弧三角形 BCD 映照成直线三角形 $B'C'D'$，将圆弧 BC, BD, DC 分别映照成直线段 $B'C', B'D', D'C'$，且保持对应的内角分别相等。

五、把上半平面映照成上半平面

设在实轴 x 上任意取定三个不同的 $z_k=x_k(k=1,2,3)$，在实轴 u 上任意取定三个不同点 $w_k=u_k(k=1,2,3)$，我们就可以利用公式（4–10）得到所要求的分式线性映照。由于 x_k 和 $u_k(k=1,2,3)$都是实数，那么由公式（4–10），便得到

$$w=\frac{az+b}{cz+d} \tag{4-16}$$

的形式，其中 a,b,c 和 d 都是实数。为了要使它将上半 z–平面映照成上半 w–平面，则导数$\frac{dw}{dz}$在实轴 x 上就必须是正的：

$$\frac{dw}{dz}\Bigg|_{z=x}=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}>0,$$

由此应有 $ad-bc>0$。因此，在 a,b,c,d 都是实数并且满足条件 $ad-bc>0$ 时，公式（4–16）便给出了所要求的映照。

1.3 函数 $w=z^n$ 与 $w=\sqrt[n]{z}$ 的映照

我们知道 $w=z^n$(n 为任何一个正整数) 是复平面 $\mathscr{C}$ 上的单值函数，并且是整函数。如果在 z-平面与 w-平面中引用极坐标，令

$$z=re^{i\theta},\quad w=\rho e^{i\varphi},$$

那么由 $w=z^n$，便得到

$$\rho=r^n,\quad \varphi=n\theta。\tag{4-17}$$

这说明当 θ 从 0 增至 2π 时，φ 就从 0 增至 $2n\pi$，可见 $w=z^n$ 将 z-平面 $\mathscr{C}$ 映照成 n 重的 w-平面。因此，它在全复平面上虽然是单值的，但并不是单叶的。为此，有必要讨论它的单叶性区域，即对这区域中的任何两点 z_1,z_2，若 $z_1\neq z_2$，则其对应点 $w_1=z_1^n$，$w_2=z_2^n$ 一定不同，即 $w_1\neq w_2$。

我们考虑扇形 $\mathscr{D}_k$：

$$\mathscr{D}_k:\quad k\cdot\frac{2\pi}{n}<\theta<(k+1)\cdot\frac{2\pi}{n}\quad (k=0,1,2,\cdots,n-1)。$$

由 (4-17) 式可知，在 $w=z^n$ 的映照下，每一个扇形 $\mathscr{D}_k$ 被单叶地共形映照成去掉正实轴的 w-平面，$\mathscr{D}_k$ 中的每一条半射线($\arg z=\theta$)被映照成从 $w=0$ 出发的半射线($\arg w=n\theta$)，$\mathscr{D}_k$ 中一切以 $z=0$ 为圆心的圆弧($|z|=r$)被映照成以 $w=0$ 为圆心的圆弧($|w|=r^n$)。可见每一个扇形 $\mathscr{D}_k$ 都是 $w=z^n$ 的单叶性区域，而 $w=z^n$ 是 $\mathscr{D}_k$ 上的单叶共形映照。

函数 $w=\sqrt[n]{z}$ 是 $z=w^n$ 的反函数，它是一个 n 值函数，在极坐标下，它可表示成

$$w=r^{\frac{1}{n}}e^{i(\theta+2k\pi)/n}\quad (k=0,1,2,\cdots,n-1)。$$

原点 $z=0$ 和无穷远点 $z=\infty$ 是它的支点，在沿负实轴割开的复平面上，它的每一个单值连续分支函数：

$$w_k=|z|^{\frac{1}{n}}\exp\{(\arg z+2k\pi)/n\},\quad -\pi<\arg z<\pi$$

都是解析的，而且是单叶的。因 $|w_k|=|z|^{\frac{1}{n}}$，$\arg w_k=\arg z+2k\pi/n$，故 $w_k(z)$ 将沿负实轴割开的区域单叶地共形映照成 w-平面上的角形区域

$$\mathscr{D}_k=\left\{w\in\mathscr{C}:\ \frac{(2k-1)\pi}{n}<\arg w<\frac{(2k+1)\pi}{n}\right\}.$$

1.4 儒科夫斯基函数 $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$及其反函数

我们已经知道，函数 $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$分别在单位圆内（$|z|<1$）和在单位圆外（$|z|>1$）都是单叶的，而且除掉 $z=0$ 和 $z=\infty$ 外是解析的。为了研究它的映照情况，我们令

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta),\quad w=u+iv,$$

并且把实部和虚部分开，便得着

$$u=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta,\quad v=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta。\tag{4-18}$$

于是，我们看到，每一个圆周$|z|=r_0>1$在这个映照下被映照成椭圆：

$$(u/a)^2+(v/b)^2=1,\tag{4-19}$$

其中 $$a=\frac{1}{2}\left(r_0+\frac{1}{r_0}\right),\quad b=\frac{1}{2}\left(r_0-\frac{1}{r_0}\right)。$$

这椭圆当 $r_0\to1$ 时，被压缩成 u 轴上的一段直线段$[-1,1]$，当 $r_0\to0$ 时趋向无穷远。因此，这函数把单位圆的内部$|z|<1$单叶地映到线段$[-1,1]$的外部上（参看图 4.7），并且把下半单位圆周 $\overset{\frown}{ADC}$ 映照成直线段$[-1,1]$的下沿$\overrightarrow{ADC}$，把上半单位圆周 $\overset{\frown}{CBA}$ 映照成直线段$[-1,1]$的$\overrightarrow{CBA}$。

我们还可以看到，半径 $\arg z=\theta_0$ 在这个函数的映照下被映照成双曲线

$$\frac{u^2}{\cos^2\theta_0}-\frac{v^2}{\sin^2\theta_0}=1\tag{4-20}$$

（图 4.7(a)）。这些双曲线的焦点与那些椭圆(4-19)的焦点相同，都位于-1和1这两个点。

这个把单位圆外$|z|>1$单叶地共形映照成全 w-平面除去裂纹

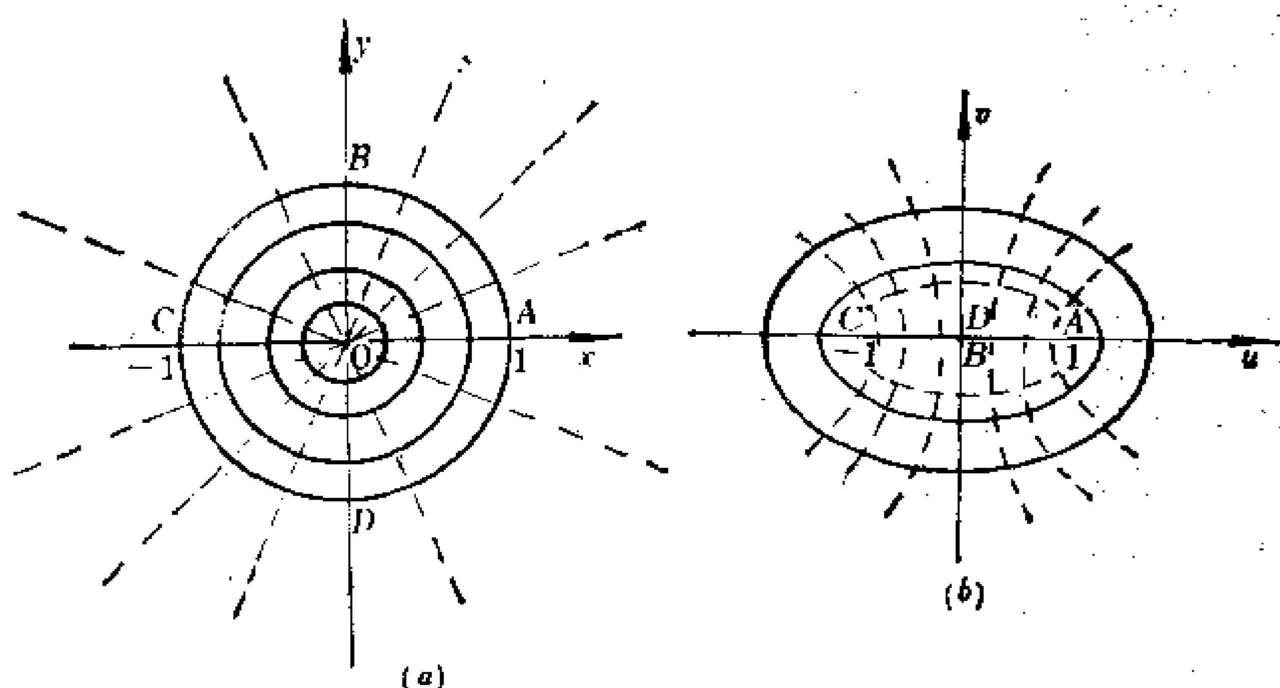


图 4.7

$[-1,1]$ 的儒廓夫斯基函数 $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$，在平面流体力学、弹性力学和断裂力学等领域内，特别在平面机翼的绕流问题方面有杰出的应用。

这个函数的反函数

$$z=w+\sqrt{w^2-1} \tag{4-21}$$

是一个双值函数，$w=+1$ 和 $w=-1$ 是它的支点，在全平面除去线段 $[-1,1]$ 的区域 $\mathscr{D}$ 上，它被分成两个单值连续分支函数

$$z_1=w+\sqrt{w^2-1}, \quad z_2=w-\sqrt{w^2-1},$$

它们是区域 $\mathscr{D}$ 上的单叶解析函数，是 $\mathscr{D}$ 上的共形映照，而且 $z_1z_2=1$。当 $w>1$ 时，若取定 $\sqrt{w^2-1}$ 是正值的一支，则 $z_1=w+\sqrt{w^2-1}$ 把区域 $\mathscr{D}$ 单叶地共形映照成单位圆的外部 $|z|>1$，把那些椭圆(4-19)映照成单位圆外的同心圆 $|z|=r_0>1$，把那些双曲线（4-20）映照成单位圆外的那部分半射线 $\arg z=\theta$。

从关系式(4-18)我们还可以看出，儒廓夫斯基函数也把单位圆内

的圆周$|z|=r_0<1$映照成具有半轴$a=\frac{1}{2}\left(r_0+\frac{1}{r_0}\right)$,$b=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_0}-r_0\right)$的椭圆。这些椭圆与由圆周$|z|=r_0>1$映照成的那些椭圆(4-19)相同，不过方向相反。因此，这函数把单位圆的内部$|z|<1$也映照到u轴上的线段$[-1,1]$的外部区域$\mathscr{D}$上，这时上半单位圆周$\overset{\frown}{ABC}$被映照成裂缝$[-1,1]$的下沿$\overrightarrow{ADC}$，而下半圆周$\overset{\frown}{CDA}$被映照成裂缝$[-1,1]$的上沿$\overrightarrow{CBA}$。这个函数的反函数$z_2=w-\sqrt{w^2-1}$把区域$\mathscr{D}$单叶地共形映照成单位圆的内部$|z|<1$，把这些椭圆映照成同心圆$|z|=r_0<1$，把那些双曲线（4-20）映照成单位圆内的半径$\arg z=\theta$。

下面我们来介绍儒廓夫斯基翼形，这是一种借助于儒廓夫斯基变换所得到的机翼剖面的翼形。

在将机翼剖面映照成近似圆周曲线的实际问题中，变换

$$\frac{w-Kc}{w+Kc}=\left(\frac{z-c}{z+c}\right)^K \tag{4-22}$$

是重要的。若机翼在后缘有一尖点，记$\beta=(2-K)\pi$，则β是机翼剖面在这一点的上部和下部切线的夹角。若在z-平面上画一个圆，它通过点$z=-c$，并把点$z=c$包围在其内部，且与连接$z=-c$和$z=c$两点的连线交于$z=c+\varepsilon$，$|\varepsilon|$是小的，则这个圆被变换（4-22）映照成w-平面上机翼形状的曲线。

特别当$c=1,K=2$时，我们将详细地讨论。

在研究空气绕机翼流动的实际问题中，所要求的变换是这样的变换：它把机翼剖面的外部区域映照成圆或近似圆周曲线的外部区域。当$c=1,K=2$时，（4-22）式成为

$$\frac{w-2}{w+2}=\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2, \tag{4-23}$$

它把z-平面上经过点$z=-1$和包含点$z=1$的圆周映照成w-平面上的翼形曲线，即所谓**儒廓夫斯基剖面**。

我们容易地看出，（4-23）式是与已经讨论过的变换

$$w=z+\frac{1}{z} \tag{4-24}$$

是一样的。

若C是z-平面上经过点$z=-1$且使得点$z=1$在其内部的圆周，则变换（4-24）共形地将C的外部映照到儒科夫斯基剖面F的外部。曲线F的形状能容易地从C得到。事实上，可用作图法求得。对C上的每一点z，把矢量z与矢量$\frac{1}{z}$相加，即得在变换(4-24)下的像。参看图4.7(c)。

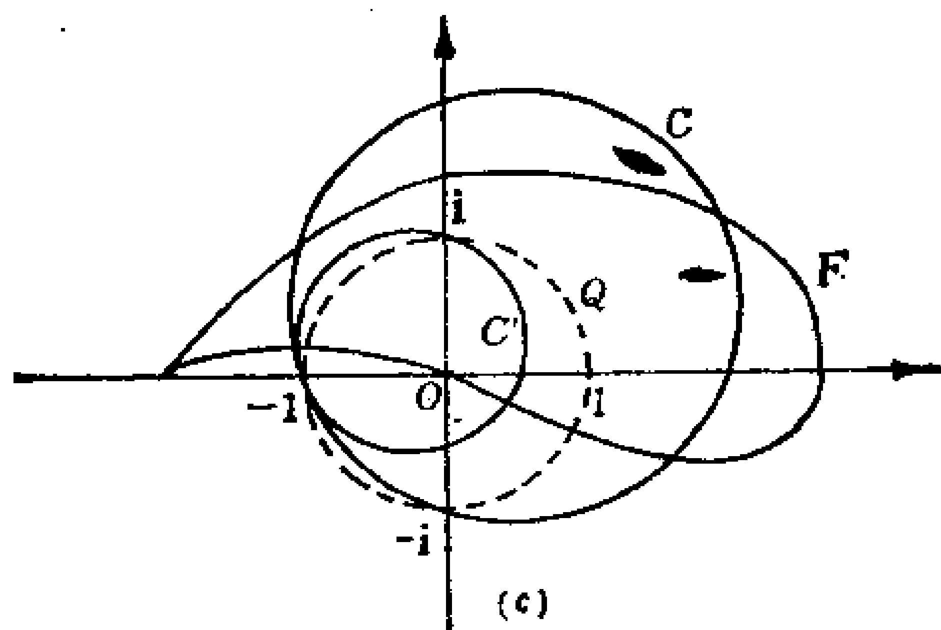


图 4.7

我们还可以将变换（4-23)看成下列三个变换的复合：

$$t=\frac{z+1}{z-1}, \quad \zeta=t^2, \quad w=2\frac{\zeta+1}{\zeta-1}。$$

圆周C被第一个变换映照成t-平面上经过$t=0$的圆Γ；第二个变换将圆Γ变成ζ-平面上的心脏曲线，其尖点位于$\zeta=0$；第三个变换将心脏线变换成w-平面上的翼形曲线F。

由于$z=1$对应于$t=\infty$，因此C的外部被共形地映照成Γ的内部；心脏线的内部共形地对应于Γ的内部，由于$\zeta=1$对应于$w=\infty$，因而F的外部共形地对应于心脏线的内部，即共形地对应于C的外部。

1.5 指数函数与对数函数的映照

在第一章的§3.2中，我们知道，指数函数 $w=e^z$ 是全复平面 $\mathscr{C}$ 上的单值解析函数。若置 $z=x+iy, w=\rho e^{i\varphi}$，那么

$$\rho=e^x, \quad \varphi=y。 \tag{4-25}$$

由此可见，$w=e^z$ 把直线 $y=y_0$ 映照成射线 $\varphi_0=y_0$，把线段 $x=x_0, -\pi\leqslant y<\pi$ 映照成圆周 $|w|=e^{x_0}$。这当带形区域 $-\pi<y<\pi$ 被映照成 w-平面除去负实轴所得到的区域 $\mathscr{D}_0$（见图4.8）。类似地，由（4-25）可知，函数 $w=e^z$ 把带形区域

$$\mathscr{S}_k: \quad (2k-1)\pi<y<(2k+1)\pi \quad (k=\pm1, \pm2, \cdots)$$

映照成 w-平面除去负实轴所得到的区域 $\mathscr{D}_k$：

$$\mathscr{D}_k: \quad (2k-1)\pi<\arg w<(2k+1)\pi。$$

实际上 $\mathscr{D}_k=\mathscr{D}_0(k=\pm1, \pm2, \cdots)$。由此可见，函数 $w=e^z$ 在 z-平面上并不是单叶的，而在上述这些带形区域 $\mathscr{S}_k$ 内是单叶的，故在每一个 $\mathscr{S}_k$ 带形区域内是单叶的共形映照。

对数函数 $z=\log w=\log|w|+i\operatorname{Arg} w=\log|w|+i(\arg w+2k\pi)$ 是指数函数 $w=e^z$ 的反函数，其中，$k=0, \pm1, \pm2, \cdots$。在沿负实轴割开所得到的区域 $\mathscr{D}_0$ 内，正如第一章的§3.5中所述，它被分成可列无穷多个单值连续分支函数：

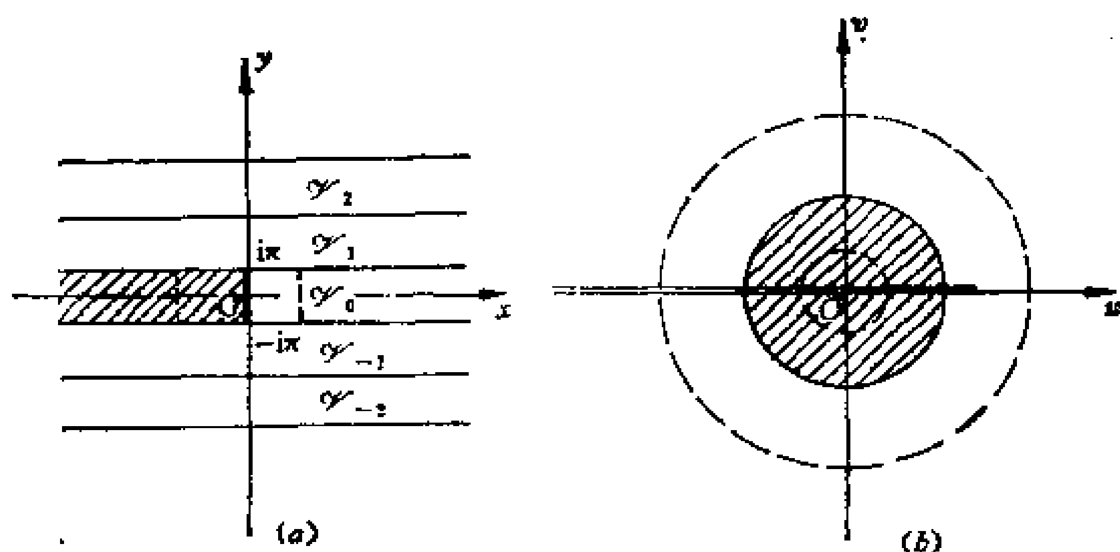


图 4.8

$$z_k=\log|w|+i(\arg w+2k\pi)\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

其中$-\pi<\arg w<\pi$。因此，每一个单值连续分支函数在区域 $\mathscr{D}_0$ 内是单叶、解析的，因而是一个单叶的共形映照，它把从原点出发的射线 $\arg w=\varphi_0$，$-\pi<\varphi_0<\pi$ 映照成带形区域 $\mathscr{V}_k$ 中的一条水平直线：$\operatorname{Im}z=(2k-1)\pi+\varphi_0$，把圆周$|w|=\rho_0$ 映照成 $\mathscr{V}_k$ 中的直线段：$x=\log\rho_0$，$(2k-1)\pi<y<(2k+1)\pi$，把单位圆除去负实轴所得到的区域映照成 $\mathscr{V}_k$ 中的左半带形：$x<0$，$(2k-1)\pi<y<(2k+1)\pi$。

1.6 正弦函数的映照

按照第一章 §3.3 中的定义，正弦函数

$$w=\sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})$$

是全平面 $\mathscr{C}$ 上的单值解析函数，但不是单叶的。为了研究它的映照情况，我们首先得确定它的单叶性区域。

置

$$iz=z_1,\quad e^{z_1}=z_2,\quad z_3=-iz_2=\frac{e^{iz}}{i},$$

我们便有

$$w=\sin z=\frac{1}{2}\left(z_3+\frac{1}{z_3}\right)。$$

根据本章 §1.5 中所述，$z_2=e^{z_1}$ 把每一个水平带形区域 $\mathscr{V}_k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，特别是 $\mathscr{V}_0$ 单叶地共形映照到 z_2-平面除去负实轴所得到的区域 $\mathscr{D}_0$。$z_3=z_2e^{i3\pi/2}$ 把 $\mathscr{D}_0$ 单叶地共形映照到 z_3-平面除去正虚轴所得到的区域 $\mathscr{G}_0$，见图 4.9。根据本章 §1.4 中所述，函数 $w=\frac{1}{2}\left(z_3+\frac{1}{z_3}\right)$把单位圆单叶地共形映照成 w-平面除去水平线段$[-1,1]$和负虚轴所得到的区域。因此，$w=\sin z$ 把每一个上半垂直带形区域

$$\mathscr{U}_k:\quad(2k-1)\pi<x<(2k+1)\pi,\quad y>0,$$

特别是把 $\mathscr{U}_0(-\pi<x<\pi,y>0)$单叶地共形映照到 w-平面除去线段$[-1,1]$和负虚轴所得到的区域，把条形 $y\geqslant0$，$-\pi/2<x<\pi/2$ 共

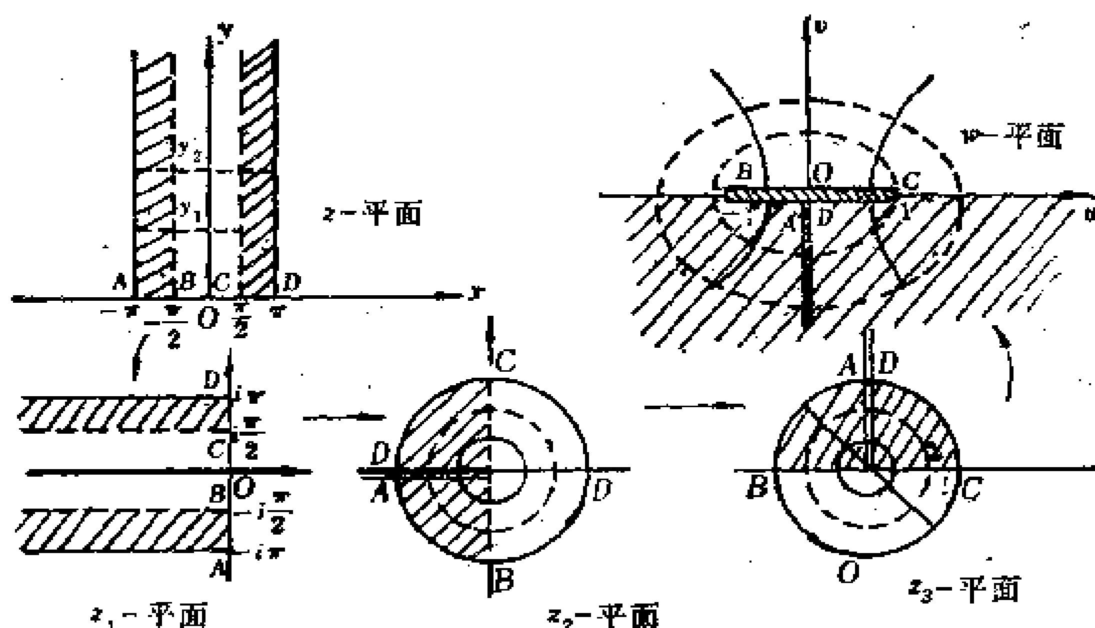


图 4.9

形映照成 w-平面的上半平面，使得半直线 $y>0$, $x=-\pi/2$ 对应于 $v=0, u<-1$, 半直线 $y>0$, $x=\pi/2$ 对应于 $v=0, v>1$, 线段 $-\pi/2<x<\pi/2$ 对应于线段 $-1<u<1$。

由 $w=u+iv=\sin(x+iy)=\sin x\cdot\operatorname{ch} y+i\cos x\cdot\operatorname{sh} y$, 我们有 $u=\sin x\operatorname{ch} y$, $v=\cos x\cdot\operatorname{sh} y$。注意到 $\operatorname{ch}^2 y-\operatorname{sh}^2 y=1$, 易知半直线 $y>0, x=x_1, x_2$, $-\pi/2<x_1, x_2<\pi/2$ 被变成双曲线

$$\frac{u^2}{\sin^2 x_j}-\frac{v^2}{\cos^2 x_j}=1 \quad (j=1,2),$$

而水平线段 $y=y_1, y_2>0$, $-\pi/2<x<\pi/2$ 被变成椭圆

$$\frac{u^2}{\operatorname{ch}^2 y_j}+\frac{v^2}{\operatorname{sh}^2 y_j}=1 \quad (j=1,2)。$$

习　题

1. 设分式线性变换（4-3）中的系数 a,b,c,d 都是实数。证明：关于 x 轴对称的曲线在这种分式线性变换映照下，其映像曲线关于 u 轴（$w=u+iv$）也是对称的。

2. 设分式线性变换（4-3）以 -1 和 1 为其不动点，这种变换的最一般的形式又是什么？若以 1 和 i 为其不动点，那么它的最一般的形式又是什么？

3. 对变换 $w=1/z$,试问下列曲线的像曲线是什么? 将所得的结果以 u 和 v 的方程给出，其中 $w=u+iv$:

(1) $x+y=1$; (2) $(x+1)^2+y^2=1$;

(3) $(x-1/2)^2+(y-1/2)^2=1/2$; (4) $(x+2)^2+y^2=1$。

4. 在 $w=(z-i)/(z+i)$变换下，习题 3 中每条曲线的像曲线是什么?

5. 在下列变换映照下

(1) $w=1/z$; (2) $w=1/(z-1)$;

(3) $w=z/(z+1)$; (4) $w=e^{i\pi/4}z/(z+1)$,

圆形域$|z-1|<1$ 的映像是怎样的区域?

6. 试求区域 $1<\mathrm{Re}z<2$ 在下列变换

(1) $w=1/(z+1)$; (2) $w=i/(z-1)$

下的映像。

7. 定义四个不同复数（或点）z_1,z_2,z_3,z_4 的交叉比为

$$(z_1,z_2,z_3,z_4)=\frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_1-z_4)(z_3-z_2)}。\tag{4-26}$$

若这些数的任何一个，比如 z_j,是∞,则重新定义（4-26）式中的交叉比，使得其右端中含有 z_j 的两项的商，即 $(z_j-z_k)/(z_j-z_m)$,并取成 1。设 w_1,w_2,w_3,w_4 分别是 z_1,z_2,z_3,z_4 在分式线性变换（4-3）下的像，证明该交叉比是不变的，即

$$(w_1,w_2,w_3,w_4)=(z_1,z_2,z_3,z_4)。$$

8. 试求将 $z_1=1,z_2=i,z_3=0$ 映照成 $w_1=0,w_2=-1,w_3=-i$ 的分式线性变换。在这种分式线性变换下，过 $z_1=1,z_2=i,z_3=0$ 这三点的圆的映像是什么? 这圆的内部的映像是什么?

9. 试求将 $z_1=1,z_2=i,z_3=0$ 映照成 $w_1=0,w_2=\infty,w_3=-i$ 的分式线性变换。

10. 试求出将区域 $0<\arg z<\pi/2$ 映照成$|w|<1$ 的变换。

11. 分式线性变换

$$w_1=\frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}$$

确定了从 z-平面到 w_1-平面的一个映照。此外，第二个分式线性变换

$$w=\frac{a_2w_1+b_2}{c_2w_1+d_2}$$

产生了从 w_1-平面到 w-平面的一个映照。证明：这两个分式线性变换的复合映照仍是一个分式线性变换

$$w=\frac{az+b}{cz+d},$$

并求出 a,b,c 与 $a_1,a_2,\cdots,d_1,d_2$ 的函数关系式。

12. 试求一个单叶共形映照，它将两个圆域 $|z-1|<2$ 与 $|z+1|<2$ 的重叠区域映照成上半平面。

13. 试求一个分式线性变换，它将位于两圆周 $|z|=2$ 和 $|z-i|<1$ 之间的区域映照成条形区域 $0<\mathrm{Im}w<k$，其中直线 $\mathrm{Im}w=0$ 是 $|z|=2$ 的映像，k 是某个常数，读者可适当选取。

14. 试求一共形映照 $f(z)$，它将带形 $-\frac{\pi}{4}<\mathrm{Re}\,z<\frac{\pi}{4}$ 单叶地映照成单位圆 $|w|<1$，并且使得

$$f\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)=\pm1,\quad f(i\infty)=i.$$

15. 试求一共形映照，它把去掉了一垂直线段 $(a,a+ih)$ 的上半平面 $\mathrm{Im}\,z>0$ 单叶地共形映照到上半平面 $\mathrm{Im}\,w>0$。

16. 试求一共形映照，它把从圆 $|z|<1$ 中去掉了一段半径 $[(1-h)e^{i\alpha},e^{i\alpha}]$ 的区域单叶地共形映照到单位圆 $|w|<1$。

17. 试求一共形映照，它把 z-平面去掉了线段 $-a\leqslant x\leqslant a,\ y=0$ 及 $-a\leqslant y\leqslant a,\ x=0$ 的区域单叶地共形映照为单位圆外 $|w|>1$。

§2 共形映照与边界值问题

在这本书的第一章的§2.5，我们建立了调和函数与二维物理问题，如热的传导、液体的流动和静电学等之间的紧密联系。后来在第二章的 §1.6 中，我们又讨论了圆与半平面上的迪利希莱问题。我们知道，当调和函数的值在圆柱体的表面被给定时，则调和函数在圆柱体内所取的值就能找到。

在这一节里，我们将联合运用关于共形映照、调和函数、解析函数和复势等我们所学过的知识，去解迪利希莱问题，并且它的边界不限于半平面和圆柱体。首先，我们将讨论静电力学和热流动的迪利希莱问题。随后，我们还将讨论热流和液体流动的另一类问题，在那些问题中，我们将寻找一个未知调和函数，其法线方向导数在部分边界

上已被给定。虽然这些问题不是迪利希莱问题，但共形映照能帮助我们求解。在广泛的一类物理问题中，共形映照的效用导自下述定理：

定理 1 设解析函数 $w=f(z)$ 将 z-平面上的区域 $\mathscr{D}$ 共形映照成 w-平面上的区域 $\mathscr{D}_1$。设 $\varphi_1(u,v)$ 在 $\mathscr{D}_1$ 内是调和的，即在 $\mathscr{D}_1$ 内

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial v^2}=0。\tag{4-27}$$

则在 $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的变数变换下，函数 $\varphi(x,y)=\varphi_1(u(x,y),v(x,y))$ 在 $\mathscr{D}$ 内是调和的，即在 $\mathscr{D}$ 内

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0。\tag{4-28}$$

证明 重复应用复合函数的求偏导数法则，经计算，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=&\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial u^2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial v^2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\\&+2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial u\partial v}\left(\frac{\partial u\partial v}{\partial x\partial x}+\frac{\partial u\partial v}{\partial y\partial y}\right)+\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\\&+\frac{\partial\varphi_1}{\partial v_1}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)。\end{aligned}\tag{4-29}$$

由于 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 $\mathscr{D}$ 内是解析的，且 $f'(z)\neq0$，则函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 $\mathscr{D}$ 内是调和的，且满足柯西-黎曼方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad -\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}。\tag{4-30}$$

于是，由（4-29）式，我们有

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial v^2}\right)|f'(z)|^2。\tag{4-31}$$

由于 $\varphi_1(u,v)$ 在 $\mathscr{D}_1$ 内是调和的，且 $f'(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 内不等于零，故（4-28)式在 $\mathscr{D}$ 内处处成立，即 $\varphi(x,y)$ 在 $\mathscr{D}$ 内是调和的。定理证完。

定理 1 告诉我们，调和函数的调和性在共形映照变换下是不变的。

2.1 应用共形映照于迪利希莱问题

在 z-平面上给定一个区域 $\mathscr{D}$。我们要寻找一个函数 $\varphi(x,y)$（比如说，温度或电压），它在 $\mathscr{D}$ 内是调和的，在 $\mathscr{D}$ 的边界 $\partial\mathscr{D}$ 上取预

先给定的值。假设我们能找到一个解析函数（变换）$w=u+iv=f(z)$，它将 $\mathscr{D}$ 单叶地共形映照成 w–平面上的区域 $\mathscr{D}_1$，而 $\mathscr{D}_1$ 有比 $\mathscr{D}$ 较简单或更熟悉的形状。假如我们能找到一个函数 $\varphi_1(u,v)$，它在 $\mathscr{D}_1$ 内是调和的，而在 $\mathscr{D}_1$ 的每个边界点 w_0 上，其所取的值恰好等于 $\varphi(x,y)$ 在 $z_0=f^{-1}(w_0)$（即 w_0 的原像）点所要求的值。于是，根据定理 1，$\varphi(x,y)=\varphi_1(u(x,y),v(x,y))$ 在 $\mathscr{D}$ 内是调和的，且在 $\mathscr{D}$ 的边界上取到所要求的值。如图 4.10 所说明的。我们用 $w=f(z)$ 已经将 $\mathscr{D}$ 共形映照成 $\mathscr{D}_1$，C 和 C_1 分别是区域 $\mathscr{D}$ 和 $\mathscr{D}_1$ 的边界；(x_0,y_0) 是 C 上任意一点，其在 C_1 上的映像是 (u_0,v_0)。调和函数 $\varphi_1(u,v)$ 在点 (u_0,v_0) 所取的值与调和函数 $\varphi(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的值 k 相同。

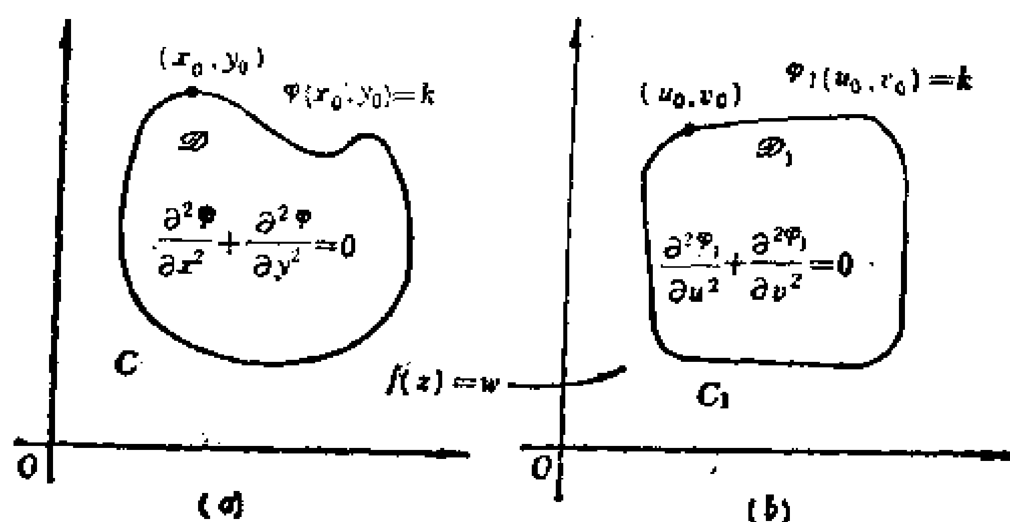


图 4.10

应该指出，要找一个解析变换，将给定的区域单叶地共形映照成某一特定的较简单的区域，可能是困难的。我们可参考共形映照字典（例如，H. Kober, Dictionary of Conformal Representations, 2nd ed. (New York: Dover, 1957)）。黎曼映照定理保证解析映照的存在性，它将任何单连通区域（除整个 z–平面外）映照到单位圆内 $|w|<1$，区域的边界被映照成 $|w|=1$。

例 4-1 两个圆柱体的表面温度分别维持在 0℃ 和 100℃，如图 4.11(a) 所示。在原点，两圆柱体被一无穷小间隙所分开。求函数 $\varphi(x,y)$，它是介于两圆柱体之间区域内的温度。

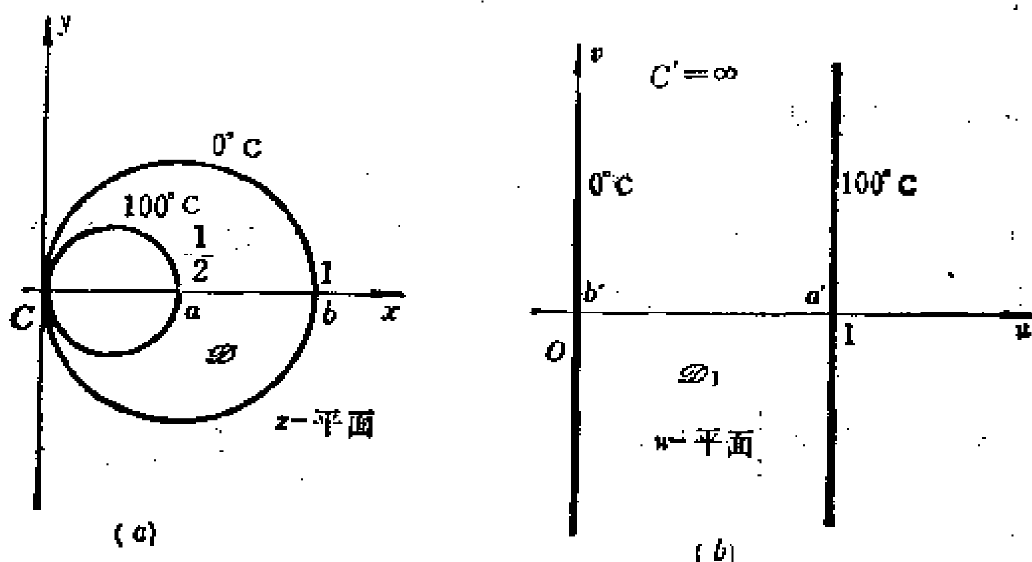


图 4.11

解 我们现在的问题是要求一个函数 $\varphi(x,y)$，它在区域 $\mathscr{D}$ 内是调和的，在边界 $\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ 上其值为 0，在边界 $\left|z-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4}$ 上其值为 100。所给区域 $\mathscr{D}$ 的形状是复杂的，但是，由于分式线性变换能将圆周变成直线，我们能把这区域变换成更加易于处理的无限带形区域，如图 4.11 (b)所示。易知把图 4.11(a)中的 a,b 和 c 映照成 $a'=1,b'=0,c'=\infty$ 的分式线性变换是

$$w=\frac{1-z}{z}。\tag{4-32}$$

在这变换下，温度为 100℃ 的圆柱体的边界被变成直线 $u=1$，而 0℃ 的圆柱边界被变成直线 $u=0$。

条形 $0<u<1$ 是两圆柱之间的区域的像域。因此，现在我们的问题是要找一个函数 $\varphi_1(u,v)$，它在这条形区域内是调和的，且满足边界条件 $\varphi_1(0,v)=0$ 和 $\varphi_1(1,v)=100$。

现在，这问题是够简单的，以致我们能够猜出结果来。或者，从对称性，我们期望 $\varphi_1(u,v)$ 与 v 是无关的，并且注意到

$$\varphi_1(u,v)=100\,u \tag{4-33}$$

满足上述两个边界条件，且在条形区域内是调和的。

$\varphi_1(u,v)$ 是一个解析函数 $\Phi_1(w)$ 的实部。我们看到 $\varphi_1(u,v)=$

$\mathrm{Re}(100\,w)$。于是，复温度 $\Phi_1(w)$ 在条形区域内是

$$\Phi_1(w)=100\,w, \tag{4-34}$$

其对应的流函数是

$$\psi_1(u,v)=100\,v。 \tag{4-35}$$

为了获得图 4.11(a)的温度 $\varphi(x,y)$ 和流函数 $\psi(x,y)$，我们必须利用方程 (4-32) 把 $\varphi_1(u,v)$ 和 $\psi_1(u,v)$ 变换到 z-平面上去。从方程 (4-32)，我们有

$$w=u+\mathrm{i}v=\frac{1}{z}-1=\frac{1}{x+\mathrm{i}y}-1=\frac{x}{x^2+y^2}-1-\frac{\mathrm{i}y}{x^2+y^2},$$

它含有

$$\begin{cases} u=\dfrac{x}{x^2+y^2}-1, \\ v=\dfrac{-y}{x^2+y^2}。\end{cases} \tag{4-36}$$

将它们代入方程(4-34)和(4-35)，我们即得

$$\varphi(x,y)=100\left(\frac{x}{x^2+y^2}-1\right), \tag{4-37}$$

$$\psi(x,y)=\frac{-100y}{x^2+y^2}。 \tag{4-38}$$

于是，由(4-37)式和(4-38)式，我们得到复温度 $\Phi(z)=\varphi(x,y)+\mathrm{i}\psi(x,y)$ 是

$$\Phi(z)=100\frac{1-z}{z}。 \tag{4-39}$$

$z=0$ 是 $\Phi(z)$ 的奇点，$\varphi(x,y)$ 的边界条件在这点是不连续的。现在，我们来讨论其等温线的形状。若在某曲面上，温度是 T_0，则根据方程(4-37)，这曲面的轨迹必须是

$$T_0=100\left(\frac{x}{x^2+y^2}-1\right)。 \tag{4-40}$$

从物理学的角度考虑，我们知道，T_0 既不可能大于边界上最热部分的温度，也不可能小于边界上最冷部分的温度，即 $0^\circ\mathrm{C}\leqslant T_0\leqslant 100^\circ\mathrm{C}$。由方程 (4-40)，经改写和配平方，即得

$$\left(x-\frac{1/2}{\left(1+\frac{T_0}{100}\right)}\right)^2+y^2=\left(\frac{1/2}{1+\frac{T_0}{100}}\right)^2。\qquad (4-41)$$

于是温度为 T_0 的等温线是一圆柱体，其轴经过

$$y_0=0,\quad x_0=\left(\frac{1/2}{1+\frac{T_0}{100}}\right)。$$

少数这种圆柱的截线被表示在图 4.12 中，它们是些圆周。

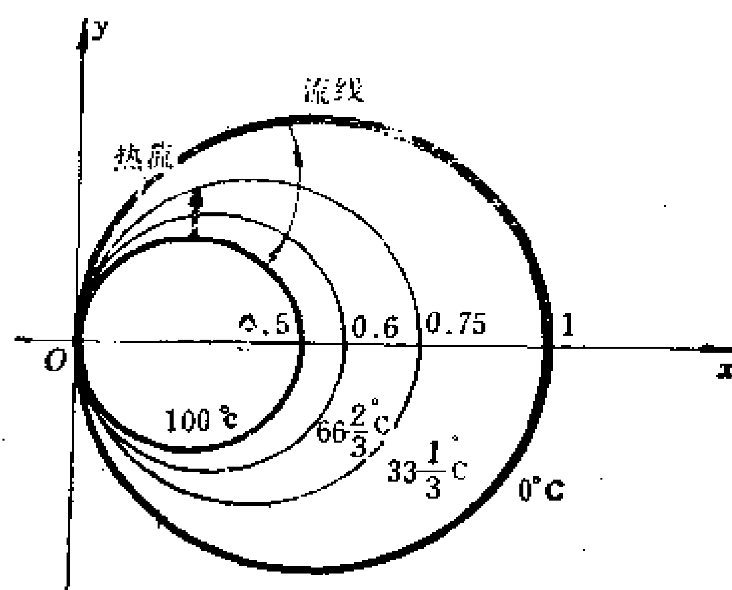


图 4.12

由复势(4-39)，立即可得介于两圆柱体间的复热流密度 $q(z)$。我们记得

$$q(z)=-k\overline{\left(\frac{d\Phi}{dz}\right)},\qquad (4-42)$$

其中

$$q(z)=Q_x(x,y)+iQ_y(x,y)。\qquad (4-43)$$

我们应该记得，Q_x 和 Q_y 给出了在介质中一点的热流矢量的分量，k 是热传导系数。由方程(4-42)和(4-39)，我们有

$$q(z)=Q_x+iQ_y=100\,k\overline{\left(\frac{1}{z^2}\right)}=\frac{100k}{(\bar{z})^2}。$$

于是，比如，在点 $x=\frac{1}{4}, y=\frac{1}{4}$（内圆柱的顶点），我们发现

$$Q_x+iQ_y=100\,k\frac{1}{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i\right)^2}=800\,ki。$$

由于 $Q_x=0$, $Q_y=800\,k$, 所以在点(1/4, 1/4)，热量的流动是平行于 y 轴的，如我们已经在图 4.12 中所指出的。

例 4-2 参考图 4.13，一导电条形有一截口：$y=0$, $-1<x<1$, 其静电势是 0 伏特，另一半圆柱体的截口是上半单位圆 $|z|=1$, $0<\arg z<\pi$, 其静电势是 10 伏特。求由两导体所围成的半圆域内的电位势 $\varphi(x, y)$。

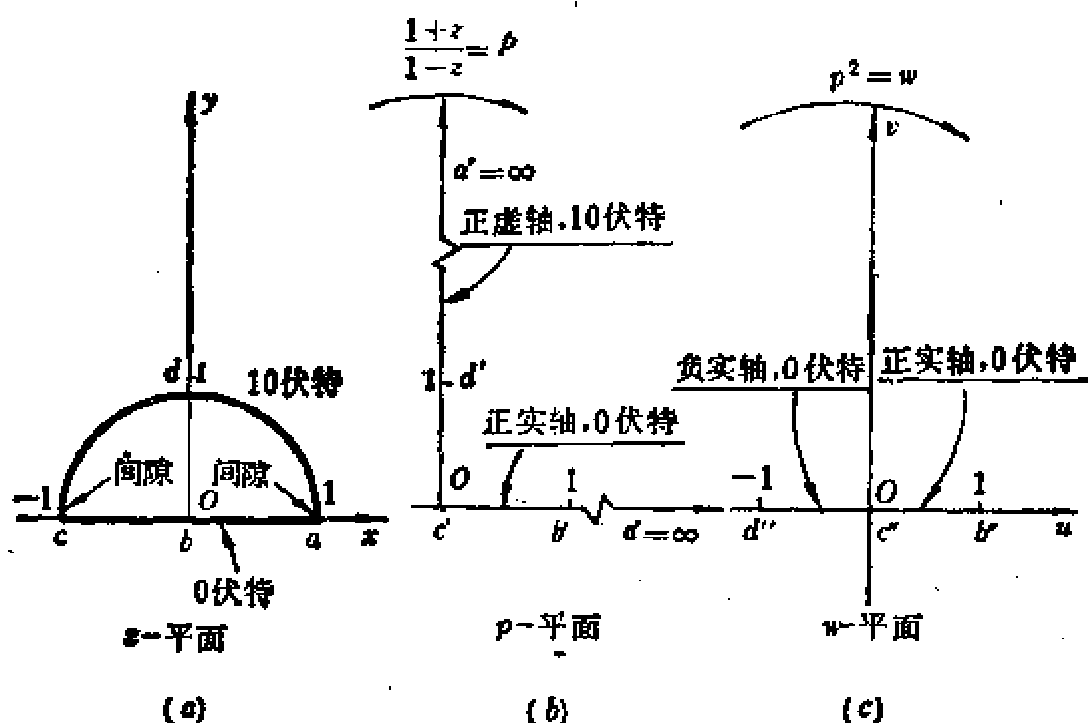


图 4.13

解 我们若能找到一个单叶的解析变换 $w=f(z)$, 它把 z-平面上的上半单位圆共形映照成上半 w-平面 $\operatorname{Im} w>0$, 且把上半单位圆的边界映照成直线 $\operatorname{Im} w=0$, 则我们能利用对上半平面的泊松积分公式（参看第二章 §1 中的 (2-38式)，求得上半平面上的调和函数 $\varphi_1(u, v)$。易知变换

$$p=\frac{1+z}{1-z} \tag{4-44}$$

把上半单位圆共形成 p=平面上的第一象限，直径 $-1<x<1$ 被映照成正实轴，上半单位圆周被映照成正的虚轴（如图 4.13(b)所示）。变换 $w=p^2$ 把第一象限共形映照成上半 w-平面，且把正实轴映照成正实轴，把正虚轴映照成负实轴（如图 4.13(c)所示）。因此，变换

$$w=\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 \tag{4-45}$$

就是我们所要求的解析变换，它把上半单位圆映照成上半平面，把直径 $-1<x<1$ 映照成正实轴，把上半单位圆周映照成负实轴（如图 4.13 (c)所示）。

为了求上半 w-平面上的电位势（调和函数）$\varphi_1(u,v)$，且满足边界条件：$\varphi_1(u,0)=0, u>0$ 和 $\varphi_1(u,0)=10, u<0$，我们能引用第二章§1 中例 2-7的结果(2-39)，它是应用半平面上的泊松积分公式得到的。在那个例子中，以 10 代替 T_0，以 u 和 v 分别代替 x 和 y，我们有

$$\varphi_1(u,v)=\frac{10}{\pi}\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{v}{u}=\frac{10}{\pi}\arg w, \tag{4-46}$$

其中 $0\leqslant\arg w\leqslant\pi$。由于

$$\varphi_1(u,v)=\mathrm{Re}\left\{-\mathrm{i}\,\frac{10}{\pi}\log w\right\},$$

所以，关于图形 4.12(c)所示情况的复势是

$$\Phi_1(w)=\frac{-10\,\mathrm{i}}{\pi}\log w。 \tag{4-47}$$

为了把 $\varphi_1(u,v)$ 变成对半圆柱的 $\varphi(x,y)$，我们回想起恒等式 $\arg(s^2)=2\arg s$。将(4-45)式代入方程(4-46)，我们有

$$\varphi(x,y)=\frac{10}{\pi}\arg\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2=\frac{20}{\pi}\arg\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=\frac{20}{\pi}\arg\frac{x+1+\mathrm{i}\,y}{1-x-\mathrm{i}\,y}$$

$$=\frac{20}{\pi}\arg\left(\frac{1-x^2-y^2}{(x-1)^2+y^2}+\frac{2\,\mathrm{i}\,y}{(x-1)^2+y^2}\right),$$

最后由于 $\arg s=\mathrm{tg}^{-1}(\mathrm{Im}\,s/\mathrm{Re}\,s)$，我们发现

$$\varphi(x,y)=\frac{20}{\pi}\mathrm{tg}^{-1}\frac{2y}{1-x^2-y^2}。 \tag{4-48}$$

我们要求 $0\leqslant\mathrm{tg}^{-1}(\cdots)\leqslant\pi/2$，因为$\varphi(x,y)$必须满足 $0\leqslant\varphi(x,y)\leqslant10$。在

反正切函数的这个分支下，方程(4-48)满足所要求的边界条件，即

$$\lim_{(x^2+y^2)\to 1}\varphi(x,y)=10 \text{（在圆弧边界上）},$$

$$\lim_{y\to 0}\varphi(x,y)=0 \text{（在平的边界上）}。$$

读者容易证明其等势线是些圆弧。

在静电学中，一个普遍关心的问题是介于两个导体之间电容的总量。若 Q 是任何一个导体上的电荷（这两个导体上所载的电荷大小相等，而符号相反)，又 ΔV 是介于一个导体与另一导体之间的电位差，则电容 C 被定义成

$$C=\frac{|Q|}{|\Delta V|}。\tag{4-49}$$

在二维问题中，我们要计算一对导体的单位长度的电容量，而导体的截口典型地是陈列在复平面内的。在方程(4-49)中，我们取 Q 为一个垂直于复平面的单位长的导体上的电荷。在这一章的附录中，我们建立了下述定理 2。在电容量的计算中，它是有用的。

定理 2 设导体是属于一带电荷的二维形状的导体，则在一个单位长度的导体上的电荷是

$$Q=\varepsilon\Delta\psi(z),\tag{4-50}$$

其中 ε 是个常数（周围介质的介电常数），而 $\Delta\psi$ 是流函数 ψ 当 z 沿导体截口的边界按逆时针方向绕行一周后所得的改变（始值减去最终的值）。

通常 $\psi(z)$ 将是多值函数，它由分支割线所确定。于是当我们环绕导体一周时，$\psi(z)$ 不会回到它的起始值，因此，$\Delta\psi(z)\neq 0$。联立方程(4-49)和(4-50)，我们有

$$C=\varepsilon\frac{|\Delta\psi|}{|\Delta V|}。\tag{4-51}$$

在这一章的附录中，还导出了下述有趣的事实：

定理 3 二维导体系统的电容量是不受导体截口的共形变换影响的。

上述两个定理的用处，由下述例子说明之。

例 4-3 (1)图 4.14(a) 中一对同轴的导电管分别以 a 和 b 为半

径，且其电位势分别保持为 V_a 和 0。求介于两管间的静电位势及它们的电容量。这个导电系统称为**同轴传输线**。

（2）用共形映和（1）的结果，决定由图 4.14(b)所示的两个导电管所组成的传输系统的电容量。这个导电系统称为**双线电线**。

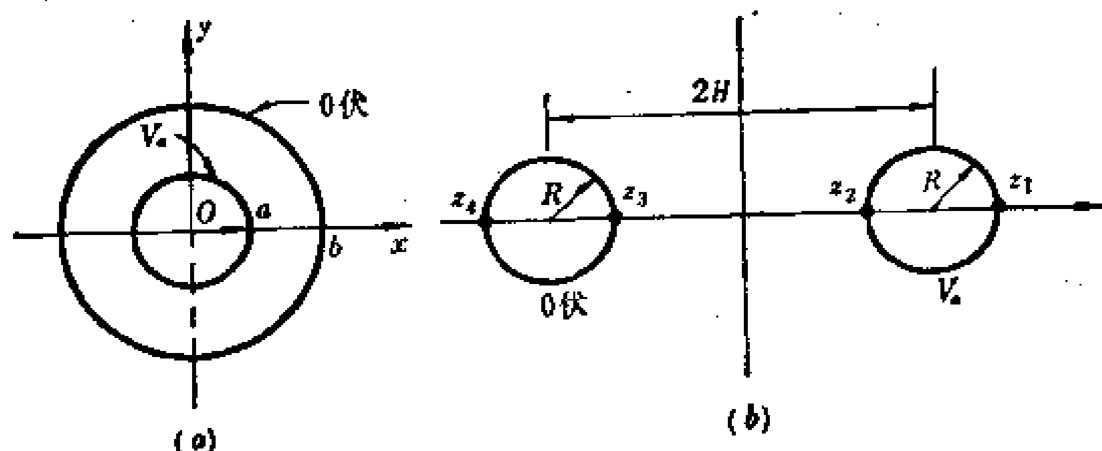


图 4.14

解 （1）我们要找一个函数$\varphi(x,y)$，它在区域$a<|z|<b$是调和的，且满足条件：

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to a}\varphi(x,y)=V_a, \tag{4-52}$$

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to b}\varphi(x,y)=0。 \tag{4-53}$$

这些要求提示我们，等势线是同心圆周及边界。我们知道，函数$\log|z|=\log\sqrt{x^2+y^2}=\mathrm{Re}(\log z)$是调和的，并且其等势线是同心圆周，但是，这个函数不满足上述边界条件。而更一般的调和函数

$\varphi(x,y)=A\log(\sqrt{x^2+y^2})+B$，其中 A 和 B 是实数　　　(4-54)

也产生同心圆的等势线，且能使它满足边界条件。从方程(4-52)，我们得到

$$V_a=A\log a+B,$$

从方程(4-53)，我们有

$$0=A\log b+B。$$

同时解这两个方程，我们获得

$$A=\frac{-V_a}{\log(b/a)},\qquad B=\frac{V_a\log b}{\log(b/a)}。$$

把它们代入方程(4-54)，我们有

$$\varphi(x,y)=\frac{-V_a\log\sqrt{x^2+y^2}}{\log(b/a)}+\frac{V_a\log b}{\log(b/a)}。\tag{4-55}$$

由于 $\log\sqrt{x^2+y^2}=\log|z|=\operatorname{Re}\log z$，我们能把方程(4-55)改写成

$$\varphi(x,y)=\operatorname{Re}\left[\frac{-V_a\log z}{\log(b/a)}+\frac{V_a\log b}{\log(b/a)}\right]=\operatorname{Re}\left[\frac{V_a\log(b/z)}{\log(b/a)}\right]。$$

上述方程显示，相应的复势由下式给出：

$$\Phi(z)=V_a\frac{\log(b/z)}{\log(b/a)}。\tag{4-56}$$

流函数 $\psi(x,y)=\operatorname{Im}\Phi(x,y)$，由方程(4-56)即得

$$\psi(x,y)=\operatorname{Im}\left[V_a\frac{\log b-\log z}{\log(b/a)}\right]=-\frac{V_a\arg z}{\log(b/a)},\tag{4-57}$$

其中 $\arg z$ 的主值支由负实轴上的割线所决定，即 $-\pi<\arg z<\pi$。我们现在沿逆时针方向绕内导体环行一周，并且计算 ψ 的改变量（参看图 4.15）。

在割线的下沿，有

$$\psi=\frac{-V_a(-\pi)}{\log(b/a)}=\frac{V_a\pi}{\log(b/a)},$$

在割线的上沿，有

$$\psi=\frac{V_a(-\pi)}{\log(b/a)}。$$

于是，在这圆周上的改变量或减小量是

$$\Delta\psi=\frac{2V_a\pi}{\log(b/a)}。$$

两导体间的电势差的量是 $|\Delta V|=V_a$，因为外导体的电位势是零。于是，按照方程(4-51)，得

$$C=\frac{\varepsilon}{V_a}\frac{2\pi V_a}{\log(b/a)}=\frac{2\pi\varepsilon}{\log(b/a)},\tag{4-58}$$

它在电机工程中是个有用的结果。

(2) 假设能找到一个实系数的分式线性变换，它把图 4.14 (b)中左侧的圆变成 w-平面上的一个圆（如图 4.16 所示），使得点 $z_4=-H-R$ 和 $z_3=-H+R$ 被映照成 $w_4=1$ 和 $w_3=-1$。

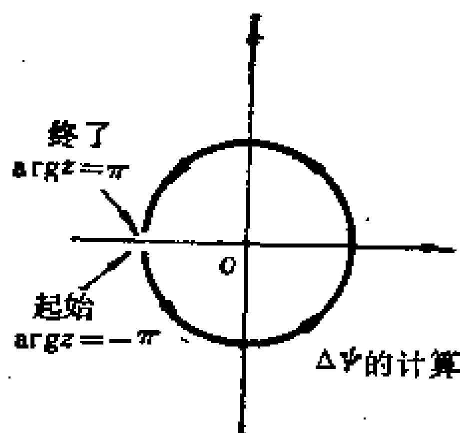


图 4.15

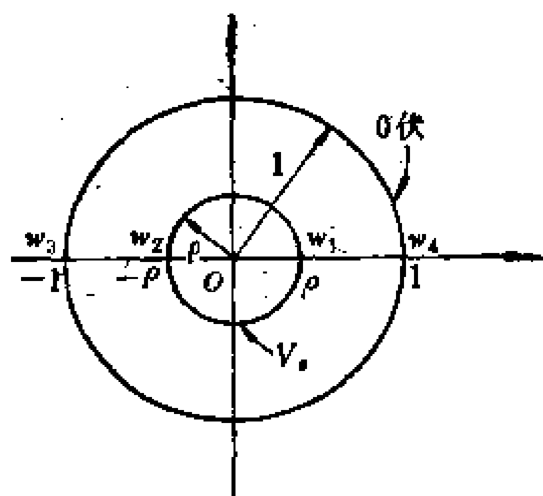


图 4.16

实系数变换保证把图4.14(b)中左侧的圆映照成图4.16中圆心位于原点的单位圆。设在这实系数分式线性变换下，图4.14(b)中右侧的圆被映照成圆$|w|=\rho$，且$z_1=H+R$的映像为$w_1=\rho$，$z_2=H-R$的映像为$w_2=-\rho$（见图4.16）。利用交比(z_1,z_2,z_3,z_4)与(w_1,w_2,w_3,w_4)在共形映照下的不变性，由前一节中的方程(4-27)，于是

$$\frac{2\rho(-2)}{(\rho-1)(\rho-1)}=\frac{(2R)(2R)}{(2H+2R)(-2H+2R)}。\qquad(4\text{-}59)$$

它等价于二次方程：

$$\rho^2+2\left(1-\frac{2H^2}{R^2}\right)\rho+1=0,\qquad(4\text{-}60)$$

方程(4-60)的根是

$$\rho=\frac{2H^2}{R^2}-1\pm\frac{2H}{R}\sqrt{\frac{H^2}{R^2}-1},$$

或者

$$\rho=\left(\frac{H}{R}\pm\sqrt{\frac{H^2}{R^2}-1}\right)^2。\qquad(4\text{-}61)$$

由于图4.14(b)中的两个圆柱体是不接触的，因此，$H/R>1$。由此可见，方程(4-61)中取正号的根ρ_+是大于1的，取负号的根ρ_-是介于0和1之间的。根据二次方程的知识，我们知道，$\rho_+\cdot\rho_-=1$。

为了能利用(1)的结果，我们应取$\rho=\rho_-<1$，此时，图 4.16 呈图 4.14(a)的形状，其外圆柱体上的电位势为 0 伏特，内圆柱体上的电位势是 V_0。利用方程 (4-58)，并且取 $a=\rho, b=1$，我们能计算出图 4.16 同轴系统的电容量。于是，我们有

$$C=\frac{2\pi\varepsilon}{\log\left(\frac{1}{\rho_-}\right)}=\frac{2\pi\varepsilon}{\log\left[\left(\frac{H}{R}+\sqrt{\frac{H^2}{R^2}-1}\right)^2\right]},$$

或者

$$C=\frac{2\pi\varepsilon}{\log\left(\frac{H}{R}+\sqrt{\frac{H^2}{R^2}-1}\right)}。\tag{4-62}$$

根据定理 3，这必定是图 4.14(b)中双线电线的电容量。

2.2 边界值问题（续）——流线作为边界

在前面所讨论的迪利希莱问题中，所得到的调和函数在区域的边界上取预先给定的值。在这一节中，我们所研究的边界值问题不是迪利希莱问题。我们要找一个函数，它在区域内是调和的，但在区域的边界上，这函数所取的值不必预先给出。相应代替的是提供关于这函数的导数在区域的边界上的信息。我们将看到，在热流问题中如何能碰到这种问题，并且怎样用共形映照去求它们的解。在习题中，我们还将看到，在液体流动中，如何会产生这种问题。

若一导热物质被某曲面所包围，且此曲面是完全隔热的，于是，根据定义，没有热量流进曲面，也没有热量流出曲面，热流密度矢量 $\boldsymbol{Q}$ 不能有（曲面的）法向分量。我们将仅仅讨论二维的情形，并且将用下述形式的复温度：

$$\Phi(x,y)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y),\tag{4-63}$$

其中 $\varphi(x,y)$是实际的温度，而 $\psi(x,y)$的流函数。在第一章的 §2.5中，我们考察过流线，即 $\psi(x,y)$取固定值的线，在每一点，流线切于热流的密度矢。图 4.17 展示了导热物质的截口，其部分边界是绝缘的。

这绝缘的部分边界必须与流线相重。否则，在绝缘部分，热流的密度矢将有法向分量。

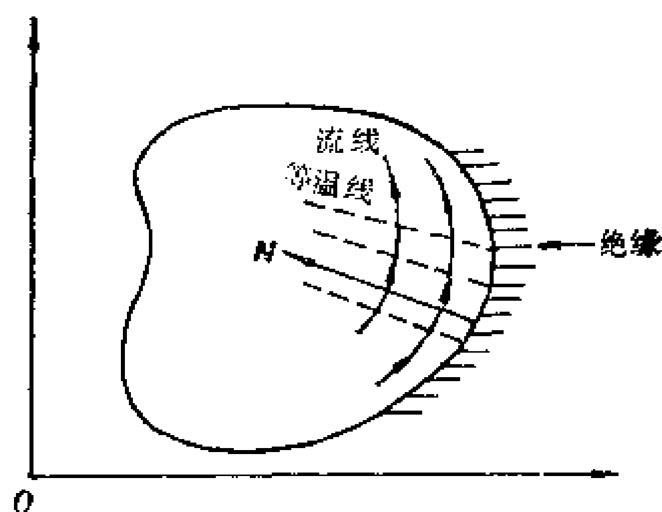


图 4.17

在第一章§2.5中，我们考察过，流线与等温线构成互相正交的曲线族。假定，如图4.17中所示，从绝缘的曲面出发，我们沿垂直于绝缘曲面的法向 N 进行。在绝缘部分我们必须沿等温线移动，且 φ 并不变化。从数学上说，即

$$\frac{d\varphi}{dn}=0(\text{在绝缘的曲面}), \tag{4-64}$$

其中，n 是沿法向度量的距离。方程(3-64)是说，温度的"法向导数"在绝缘边界上是零。

当这个热传导中的边界值问题给定时，在某部分边界上温度是被指定的，而其余的边界是绝缘的。在一定程度上，我们能像在前一节中解迪利希莱问题那样进行：我们借助于解析变换 $w=f(z)$ 把导体的截口映照成较简单的或较熟悉的形状。同以前一样，如果在 z-平面上一些点处的温度是已知的，则在(w-平面的）新区域边界的对应点上给定了温度，w-平面上的绝缘边界则对应于 w-平面上的绝缘边界。

现在我们要找一个复势，即找一个解析函数 $\Phi_1(w)=\varphi_1(u,v)+i\psi_1(u,v)$，并且使得 $\varphi_1(u,v)$ 在 w-平面的边界点上取已知的指定值。此外，我们还要求 $\psi_1(u,v)$ 产生与 w-平面上绝缘边界相重合的流线。如以前一样，把它变换到 z-平面上，即得解析函数 $\Phi(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$，其中 $\varphi(x,y)$ 就是我们所要求的温度，而 $\psi(x,y)$ 是相关的流函数。于是，$\psi(x,y)$ 将产生与绝缘边界相重的流线，而 $\varphi(x,y)$ 将在其

余边界上取预先给定的值。下面举一例说明这个方法。

例 4-4 参考图 4.18(*a*)。一导热物质充满空间 $y>0$，边界 $y=0$，$x>1$ 的温度保持为 100℃，边界 $y=0$，$x<-1$ 的温度保持为 0℃，而边界 $y=0$，$|x|<1$ 是绝缘的。求在介质内的温度分布函数 $\varphi(x,y)$ 和复温度 $\Phi(z)$。

解 我们要找一个变换，它将把给定的区域映照成一个更易于处理的形状。我们回忆起，变换

$$z=\sin w, \tag{4-65}$$

或

$$w=\sin^{-1}z$$

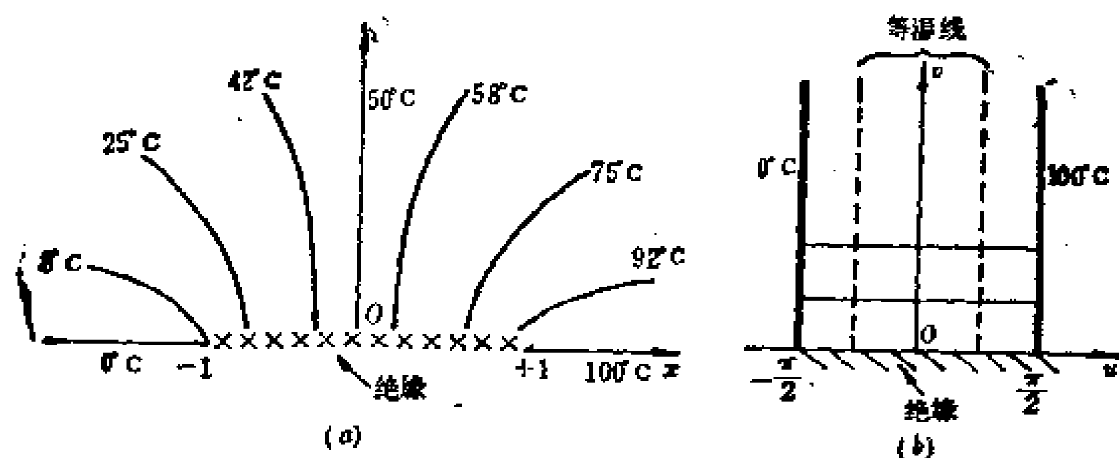


图 4.18

把图 4.18(*a*)中所示的区域共形映照成图 4.18(*b*)中所示的区域。边界条件被变成 $\varphi_1(-\pi/2,v)=0$，$\varphi_1(\pi/2,v)=100$，$v>0$。

我们看到对变换后的边值问题，其新的温度分布 φ_1 与 $v>0$ 无关，它将只是 u 的函数，下述形式的温度

$$\varphi_1(u)=Au+B,\ A,B \text{ 是实数，且 } -\pi/2\leqslant u\leqslant\pi/2 \tag{4-66}$$

将产生与边界 $u=-\pi/2$ 和 $u=\pi/2$ 相重合的等温线。为了决定 A 和 B，我们应用边界条件 $\varphi_1(-\pi/2)=0$ 和 $\varphi_1(\pi/2)=100$ 于方程(4-66)，即得

$$0=-A\frac{\pi}{2}+B,\quad 100=A\frac{\pi}{2}+B。$$

同时解这两个方程，我们有 $A=100/\pi$，$B=50$，于是方程(4-66)成为

$$\varphi_1(u)=\frac{100}{\pi}u+50,\quad -\pi/2\leqslant u\leqslant\pi/2。\tag{4-67}$$

注意到 $\varphi_1(u)=\mathrm{Re}[(100/\pi)w+50]$，我们即得复温度为

$$\Phi_1(w)=\frac{100}{\pi}w+50,\quad |\mathrm{Re}w|\leqslant\frac{\pi}{2},\tag{4-68}$$

而流函数是

$$\psi_1(v)=\mathrm{Im}\,\Phi_1(w)=\frac{100v}{\pi}。\tag{4-69}$$

由于 $w=\sin^{-1}(z)$，将它代入方程(4-68)，即得 z-平面上的复温度为

$$\Phi(z)=\frac{100}{\pi}\sin^{-1}z+50,\tag{4-70}$$

其中 $-\pi/2\leqslant\mathrm{Re}(\sin^{-1}z)\leqslant\pi/2$。

为了从方程(4-70)得到实际的温度 $\varphi(x,y)$，可如下进行：

$$z=(x+iy)=\sin w=\sin u\cdot\mathrm{ch}\,v+i\cos u\cdot\mathrm{sh}\,v,$$

于是

$$x=\sin u\cdot\mathrm{ch}\,v,$$
$$y=\cos u\cdot\mathrm{sh}\,v。$$

由于 $\mathrm{ch}^2v-\mathrm{sh}^2v=1$，则我们有

$$\frac{x^2}{\sin^2u}-\frac{y^2}{\cos^2u}=1,$$

或者

$$\frac{x^2}{\sin^2u}-\frac{y^2}{1-\sin^2u}=1。\tag{4-71}$$

我们在方程(4-71)的两边乘以 $\sin^2u(1-\sin^2u)$，便得到关于 $\sin^2u$ 的一个二次方程式，解之即得

$$\sin^2u=\frac{(x^2+y^2+1)}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{x^2+y^2+1}{2}\right)^2-x^2}。$$

对上面这个式子的两边开方，并利用 $u=\sin^{-1}(\sin u)$，我们有

$$u=\sin^{-1}\left[\pm\sqrt{\frac{x^2+y^2+1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{x^2+y^2+1}{2}\right)^2-x^2}}\right]。\tag{4-72}$$

把(4-72)式代入方程(4-67)，我们获得

$$\varphi(x,y)=\frac{100}{\pi}\sin^{-1}\pm\sqrt{\frac{x^2+y^2+1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{x^2+y^2+1}{2}\right)^2-x^2}}$$
$$+50。\qquad (4-73)$$

按照方程(4-67)的条件，此地要求$-\pi/2\leqslant\sin^{-1}(\cdots)\leqslant\pi/2$。从物理意义来看，导热介质中的温度既不能小于0℃，也不能超过100℃。为了决定根式中适当的符号，注意到点$x=0$，$y=0+$ 位于两个导体的中点，根据对称性，这点的温度应是50。这个条件要求(4-73)式内部的根号前应取负号。边界条件$\varphi(x,0)=0$，当$x<-1$时和$\varphi(x,0)=100$当$x>1$时，要求将(4-73)式外部的"±"在第一象限中取为正的，在第二象限中取为负的。注意到当我们越过正y轴时温度没有不连续性，由方程(4-67)，w-平面上的等温线是u为常值的那些曲面。根据方程(4-71)，这些等温线在z平面上成为双曲线，如图4.18(a)所示。

习　题

1.

(1) 对例4-1求$\psi=\beta$的流线方程。证明：这轨迹若画在图4.11(a)中，是中心位于y轴上且经过原点的圆。

(2) 用平面几何的论点，证明这种圆必正交于这例子中的等温线。

2. 如图4.19所示，导热介质占据了楔形$0\leqslant\arg z\leqslant\alpha$，边界上的温度保持为$T_1$和$T_2$。

(1) 证明$w=u+iv=\log z$把上述楔形变成平行于u轴的条形；

(2) 条形中的等温线显然是平行于u轴的，证明这区域中的温度能表示成下述形式

$$\varphi(u,v)=Av+B,$$

并求出A和B；

(3) 证明，在给定的楔形区域上温度是

$$\varphi(x,y)=\frac{T_2-T_1}{\alpha}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)+T_1;$$

(4) 证明：在楔形内复温度是

$$\Phi(z) = -\mathrm{i}\left(\frac{T_2 - T_1}{\alpha}\right)\log z + T_1;$$

(5) 绘画出楔形中的流线和等温线。

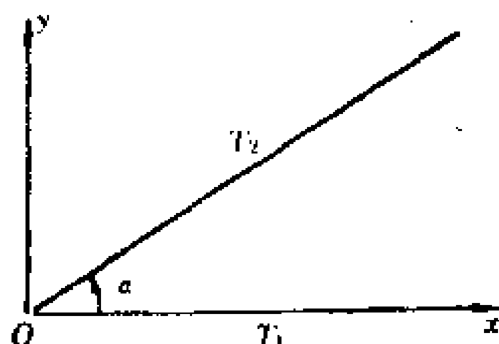


图 4.19

3. 一导电体系统有如图 4.20 所示的截口，这导体的电位势如图上所示。决定区域 $\mathrm{Im}z>0$, $|z|>1$ 上的复势 $\Phi(z)$（提示：考虑 $w=-1/z$ 并用例 4-2 中的结果）。

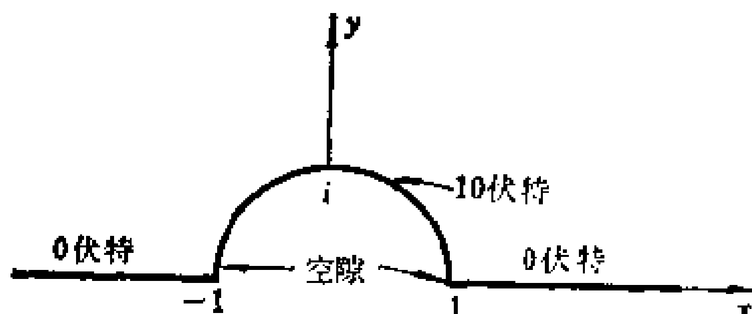


图 4.20

4. 单位直径的圆柱体保持温度为 100°C，它与温度保持在 0°C 的平面相切（见图 4.21）。导热系数为 k 的物质存在于圆柱体和平面之间，即 $\mathrm{Re}z>0$, $|z-1/2|>1/2$。

(1) 求在导热系数为 k 的物质内的温度 $\varphi(x,y)$；

(2) 求流函数 $\psi(x,y)$；

(3) 求一般的和在点 $x=1, y=1$ 的复热流密度 $q=Q_x(x,y)+\mathrm{i}Q_y(x,y)$。

5. 半径为 R 的导电圆柱体的轴与导电的平面相距为 H（见图 4.22(a)）。一分式线性变换将把这形状的截口映照成 w-平面上的一对同心圆（见图4.22(b)），像点已用足标表示。求圆的半径 ρ，这圆是直线 $x=0$ 的映像，并假定 $\rho>1$。用你

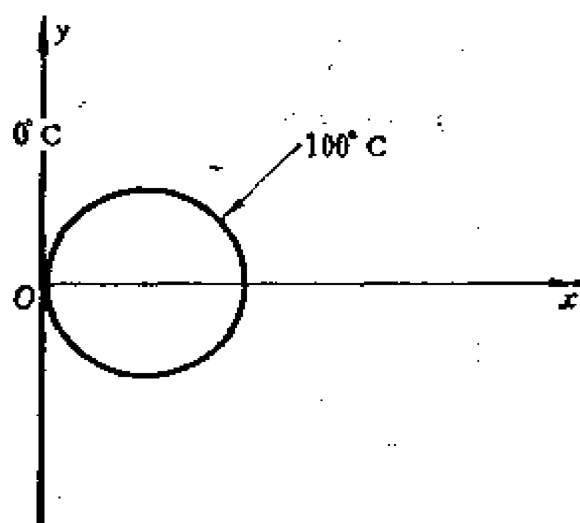


图 4.21

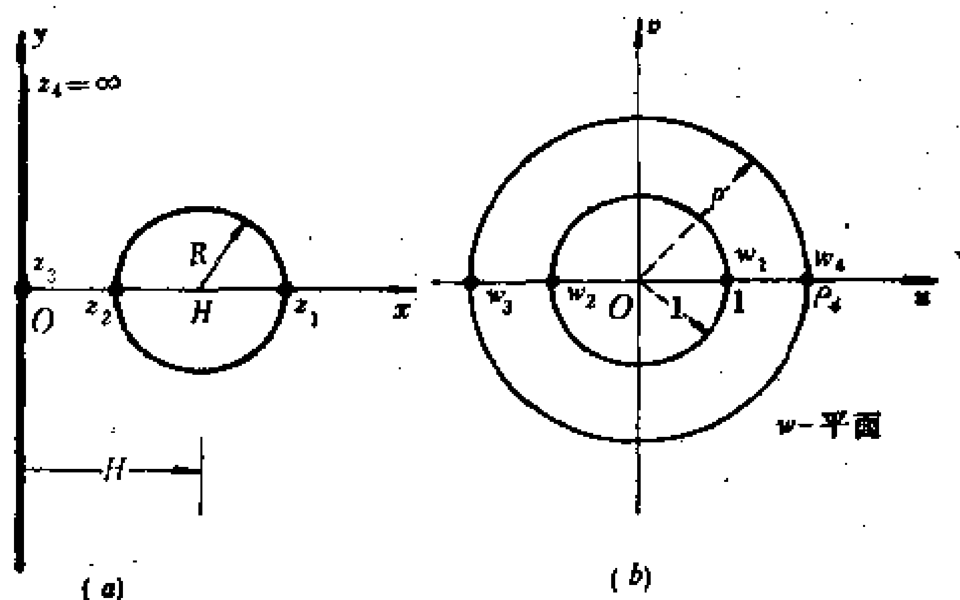


图 4.22

所得的结果证明介于圆柱体和平面之间的单位长度的电容是

$$C=\frac{2\pi\varepsilon}{\log\left(\frac{H}{R}+\sqrt{\frac{H^2}{R^2}-1}\right)},\quad H>R.$$

6. 在例 4-3 的(2)中证明：若对调图 4.16 中 w_3 与 w_4 的位置，而 w_1和 w_2 保持不变，则我们不能得到正的 ρ 值。假定 z_1, z_2, z_3 和 z_4 是不变的。

7.

(1) 传输线由两根导电的管子所组成，其截口如图 4.23 所示。它们的轴之

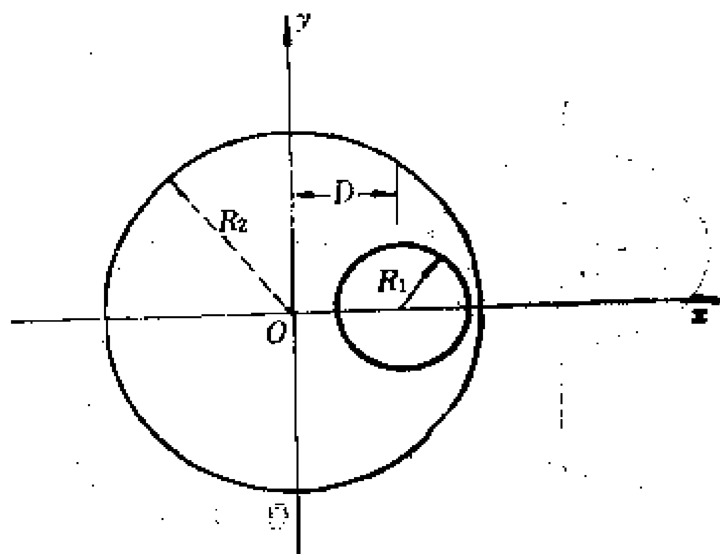


图 4.23

间的距离是 D，注意 $D+R_1<R_2$。证明单位长的电容由下式给出：

$$C=\frac{2\pi\varepsilon}{\log\rho},$$

其中

$$\rho=\frac{R_1^2+R_2^2-D^2}{2R_1R_2}+\sqrt{\left(\frac{R_1^2+R_2^2-D^2}{2R_1R_2}\right)^2-1}.$$

将电容表示成双曲函数；

(2) 取 $D=R_1=1, R_2=3$，设内导体是1伏特，外导体是0，求由两个圆所围成的区域内的截电势 $\varphi(x,y)$。

8. 考虑变换 $z=k\,\mathrm{ch}\,w$，其中 $k>0$。

(1) 证明：线段 $u=\mathrm{ch}^{-1}(A/k)$，$-\pi<v\leqslant\pi$ 被变换成椭圆 $x^2/A^2+y^2/(A^2-k^2)=1$（见图 4.24），取 $A>k$；

(2) 证明：这变换把无限直线 $u=\mathrm{ch}^{-1}(A/k)$，$-\infty<v<\infty$ 变成(1)中的椭圆，这映照是一对一的吗？

(3) 证明：线段 $u=0$，$-\pi<v\leqslant\pi$ 被变成线段 $y=0$，$-k\leqslant x\leqslant k$，这映照是一对一的吗？又无限直线 $u=0$，$-\infty<v<\infty$ 被变成什么？

(4) 求单位长传输线的电容，其截口如图 4.25(a)所示（提示：求介于一对平面之间（如图 4.25(b)所示）的静电势 $\varphi(x,y)$ 和复势）；若我们沿逆时针方向环绕图 4.25(a)中的内导体一周，则流函数 ψ 将改变多少（提示：讨论图 4.25(b)中对应的轨道）？

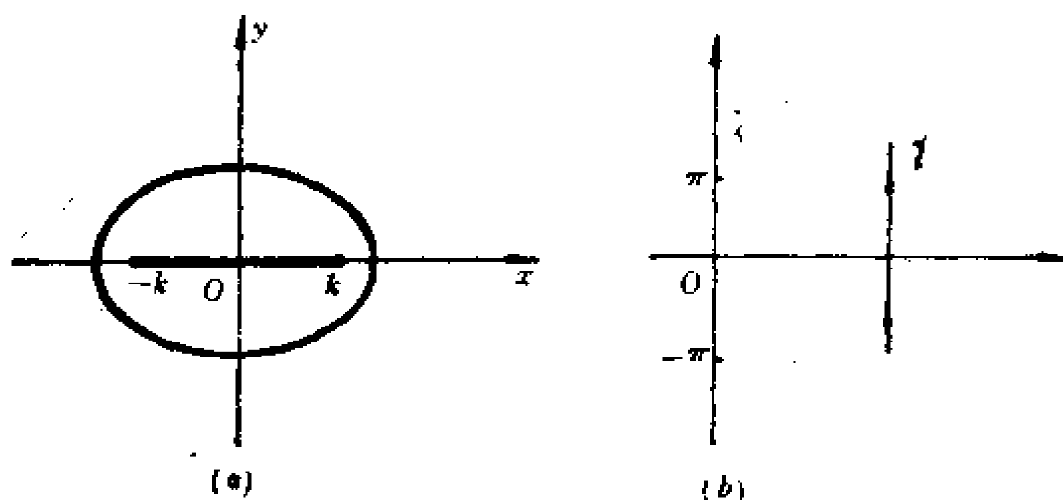


图 4.24

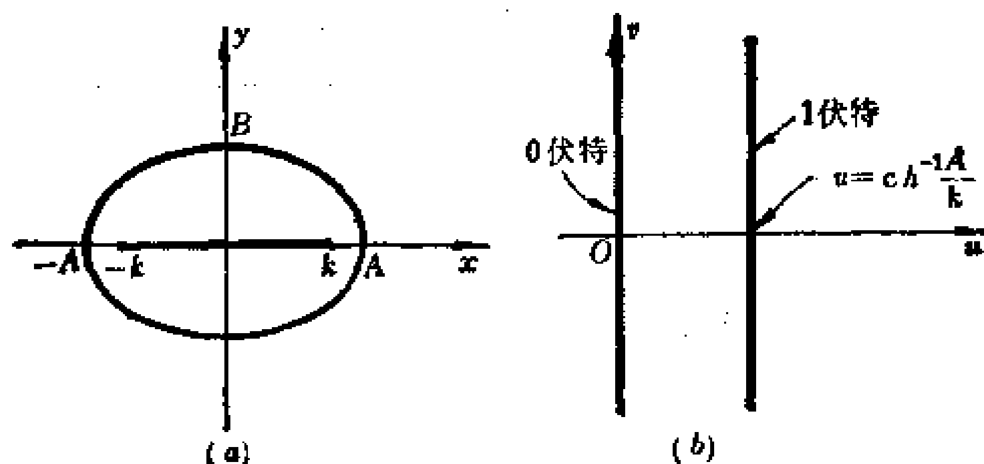


图 4.25

9.

(1) 函数

$$\varphi(u,v) = A\arg w + B \tag{4-74}$$

是调和的。其中 A 和 B 是实数，$\arg w$ 是主值。由于

$$\varphi(u,v) = \mathrm{Re}\Phi(w),$$

其中

$$\Phi(w) = -A\,\mathrm{i}\log w + B.$$

假定直线 $v=0, u>0$ 是导电体的截口，其电压保持为 V_2 伏特，又假定直线 $v=0, u<0$ 同样是另一导电体的截口，其电压保持为 V_1 伏特，如图 4.26 所示，求方程 (4-74)中的 A 和 B，使得 $\varphi(u,v)$是空间 $v>0$ 内的静电势。

(2) 利用对上半平面的泊松积分公式，求在 $v>0$ 内的调和函数，它沿 $v=0$ 满足同样的边界条件；

(3) 求 A_1, A_2 和 B（全是实数）使得

$$\varphi(u,v)=A_1\arg(w-u_1)+A_2\arg(w-u_2)+B$$
$$=\mathrm{Re}[-A_1 i\log(w-u_1)-A_2 i\log(w-u_2)+B] \qquad (4\text{-}75)$$

是空间 $v\geqslant 0$ 中（如图 4.27 所示）的边界值问题的解：$\varphi(u,v)$ 在 $v\geqslant 0$ 内是调和的，且满足

$$\varphi(u,0)=V_1, u<u_1;\quad \varphi(u,0)=V_2, u_1\leqslant u<u_2;$$
$$\varphi(u,0)=V_3,\quad u>u_2。$$

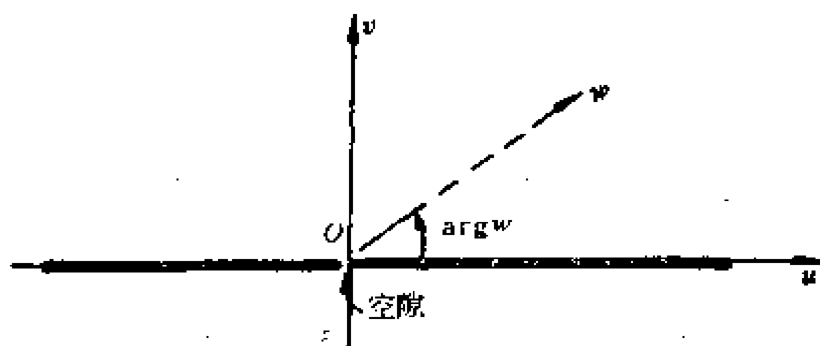


图 4.26

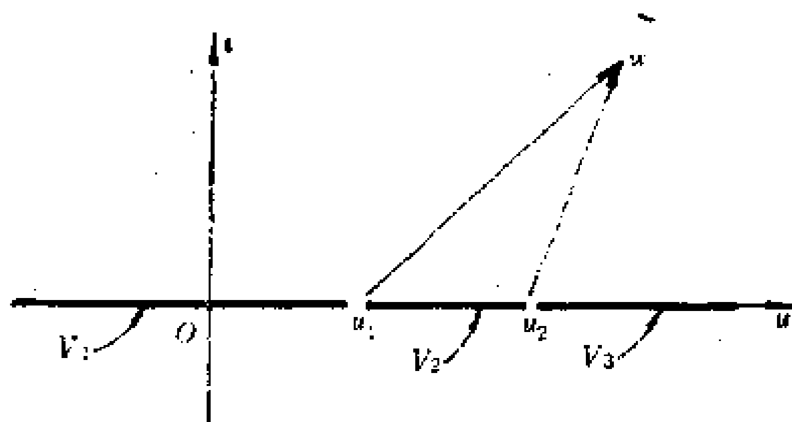


图 4.27

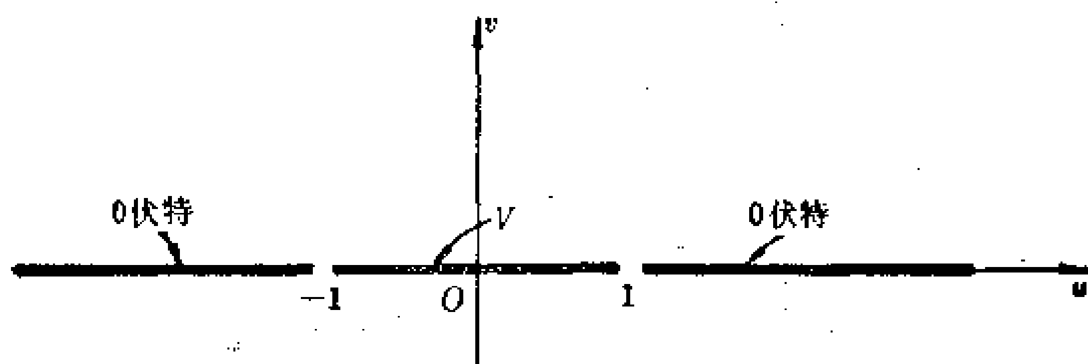


图 4.28

(4) 设(3)中 $u_1=-1$; $u_2=1$, $V_1=V_3=0$, $V_2=V$（如图 4.28 所示）。利用(3)中所得到的结果，证明在 $v>0$ 内调和且满足那些边界条件的 $\varphi(u,v)$ 由下式给出：

$$\varphi(u,v)=\operatorname{Re}\Phi(w),$$

其中复势是

$$\Phi(w)=-\mathrm{i}\frac{V}{\pi}\log\left(\frac{w-1}{w+1}\right),$$

而

$$\varphi(u,v)=\frac{V}{\pi}\mathrm{tg}^{-1}\frac{2v}{u^2+v^2-1},$$

其中 $0\leqslant \mathrm{tg}^{-1}(\cdots)\leqslant\pi$。

(5) 在图 4.28 上描出 $\varphi(x,y)=V/2$ 和 $\varphi(x,y)=V/4$ 的等势线，并给出每一等势线的方程。

10．

(1) 一导热系数为 k 的物质充满 z-平面上的第一象限，其边界保持在图 4.29 所示的状况。求在物质中点 (x,y) 的温度（提示：将所给形状变成习题 9(4) 中的形状，并利用那习题的结果）。

(2) 概述沿直线 $x=y$ 从 $x=0$ 到 $x=2$ 的温度变化情况。

(3) 求出与 $\varphi(x,y)$ 相关的流线 $\psi(x,y)$。

(4) 求在导体物质中的复热流密度 $q(x,y)=Q_x+\mathrm{i}Q_y$。

11．

(1) 导热物质的边界上的温度如图 4.30 所示。求物质内部 $-a<x<a, y>0$ 的温度 $\varphi(x,y)$（提示：利用 $w=\sin z$）；

(2) 在图上画出 $\varphi(x,a)$，$-a<x<a$。

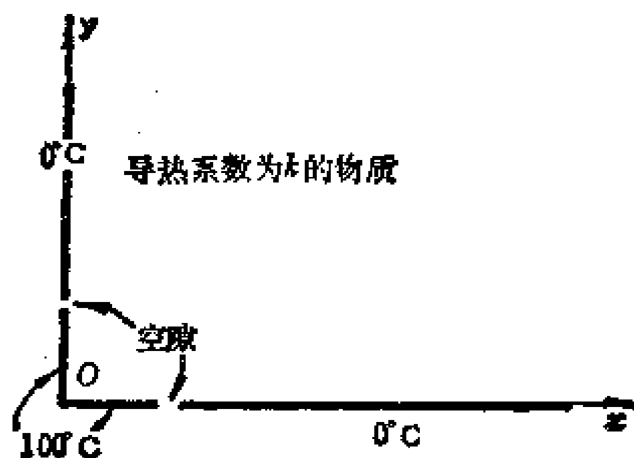


图 4.29

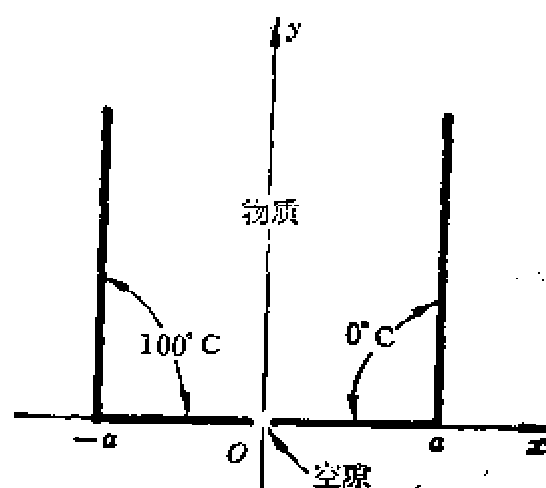


图 4.30

12.

(1) 证明：在变换 $w=\cos^{-1}(z/a)$ 或 $z=a\cos w$ 下，直线 $y=0$, $-\infty<x\leqslant-a$ 和 $y=0$, $a\leqslant x<\infty$ 被映照成 w-平面，如图 4.31 所示。假定 $a>0$。

(2) 证明：上述变换把 z-平面除去 $y=0$, $|x|\geqslant a$ 所得到的区域一对一地映照成条形 $0<u<\pi$，如图 4.31(b)所示。考虑矩形：$u_1\leqslant u\leqslant u_2$, $v_1\leqslant v\leqslant v_2$，这矩形在 z-平面上的像是什么？

(3) 两张半无限导电体，其截口如图 4.32 所示，它们之间相距 $2a$。两导体的电压保持为 V_0 伏特和 0 伏特。证明：在除去 $y=0$, $|x|>a$ 所得到的区域上其复势由下式给出

$$\Phi(z)=\frac{V_0}{\pi}\cos^{-1}\left(\frac{z}{a}\right).$$

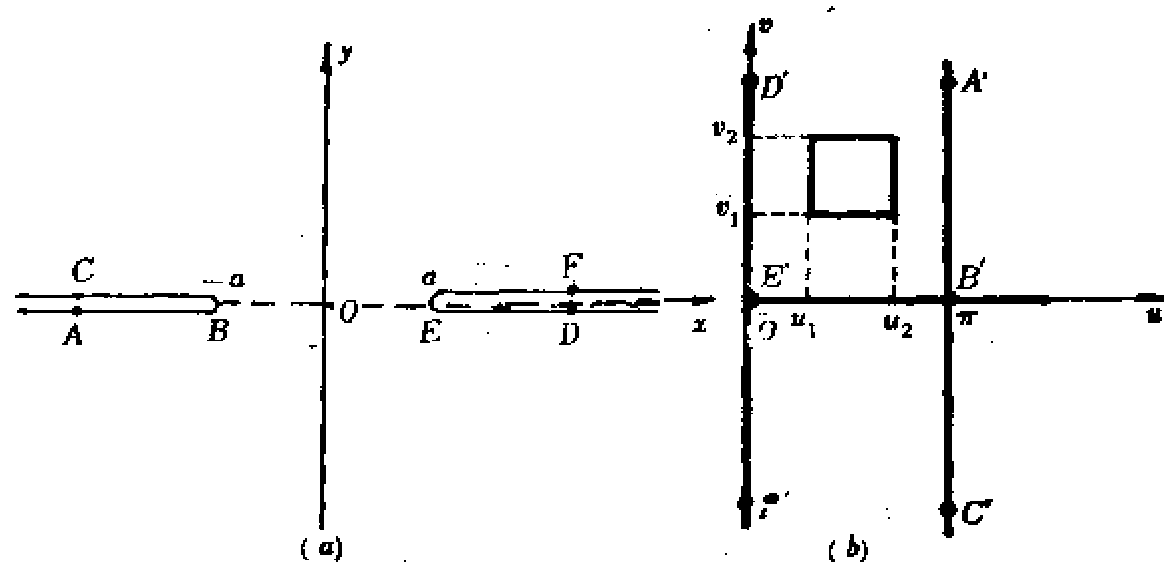


图 4.31

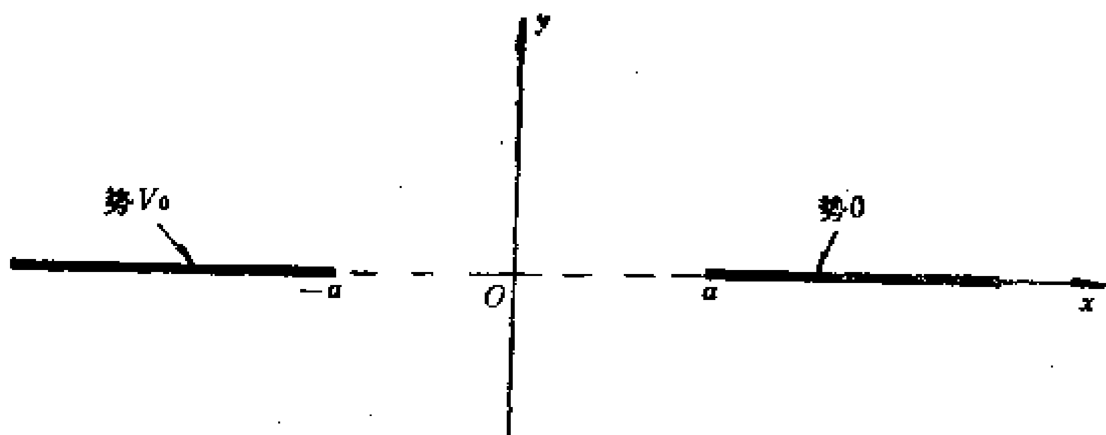


图 4.32

(4) 对 $a=1$，证明电位势是

$$\varphi(x,y)=\frac{V_0}{\pi}\cos^{-1}\pm\sqrt{\left(\frac{x^2+y^2+1}{2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{x^2+y^2+1}{2}\right)^2-x^2}},$$

其中 $0\leqslant\cos^{-1}(\cdots)\leqslant\pi$（提示。在 w-平面上求 $\varphi(u)$。将 u 用 x 和 y 来表示，并注意到 $x=\cos u\operatorname{ch}v, y=-\sin u\operatorname{sh}v$，于是 $(x^2/\cos^2u)-(y^2/\sin^2u)=1$，对 $u(x,y)$ 解这方程）。

(5) 用对称性去讨论 $\varphi(0,y)=V_0/2, -\infty<y<\infty$，并且用这结果去决定 (4) 中内部的根式前的符号。

(6) 证明(4)中的 $\varphi(x,y)$ 满足沿直线 $x\geqslant1, y\geqslant0$ 和 $x\leqslant1, y=0$ 所指定的边界条件。倘若外面根式的符号在第一和第四象限内取正号，在第二和第三象限内取负号，这是否意味着当 $\varphi(x,y)$ 越过 y 轴是不连续的？试解释之。

(7) 对 $a=1$，证明：电场的复势是 $V_0\overline{(1-z^2)^{-1/2}}/\pi$，其中 $(1-z^2)^{-1/2}$ 是由沿图 4.32 中导体的分支割线所定义。

13. 导热系数为 k 的物质有一截口，它占据了第一象限，其边界上的温度保持着如图 4.33 所示的状况。

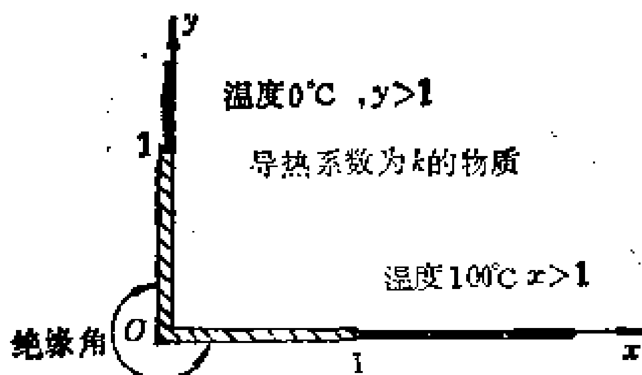


图 4.33

(1) 证明：导体内的复温度是

$$\Phi(z)=\frac{100}{\pi}\sin^{-1}(z^2)+50,\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant \mathrm{Re}\sin^{-1}(\cdots)\leqslant\frac{\pi}{2}$$

（提示：把这问题中的区域共形映照成例 4-1 中所述的区域）。

(2) 证明：导体内的温度是

$$\varphi(x,y)=50+\frac{100}{\pi}$$

$$\cdot\sin^{-1}\pm\sqrt{\frac{1+(x^2+y^2)^2}{2}\pm\sqrt{\left[\frac{1+(x^2+y^2)^2}{2}\right]^2-(x^2-y^2)^2}},$$

其中 $-\pi/2<\sin^{-1}(\cdots)\leqslant\pi/2$，在每个根式选适当的符号。

(3) 证明：复热流密度是

$$q=-\frac{200k}{\pi}\left(\overline{\frac{z}{(1-z^4)^{1/2}}}\right)=Q_x+\mathrm{i}\,Q_y.$$

(4) 设 $k=1$，选取适当的根式的值，给出下列点的 q 的分量 Q_x 和 Q_y 的数值：

$$x=1/2,\ y=0+;\qquad x=2,\ y=0+;$$
$$x=0+,\ y=1/2;\qquad x=0+,\ y=2.$$

14.

(1) 导热系数为 k 的物质有如图 4.34 所示的边界。证明：物质内的复温度是

$$\Phi=-\frac{200}{\pi}\sin^{-1}\left(\frac{z}{a}\right)+100,\quad 0\leqslant\mathrm{Re}\sin^{-1}(\cdots)\leqslant\frac{\pi}{2}$$

（提示：考虑把映照 $z=a\sin w$ 作用在条形 $0\leqslant\mathrm{Re}\,w\leqslant\pi/2,\mathrm{Im}w\geqslant0$ 上）。

(2) 证明温度为 T 的等温线位于下述双曲线上：

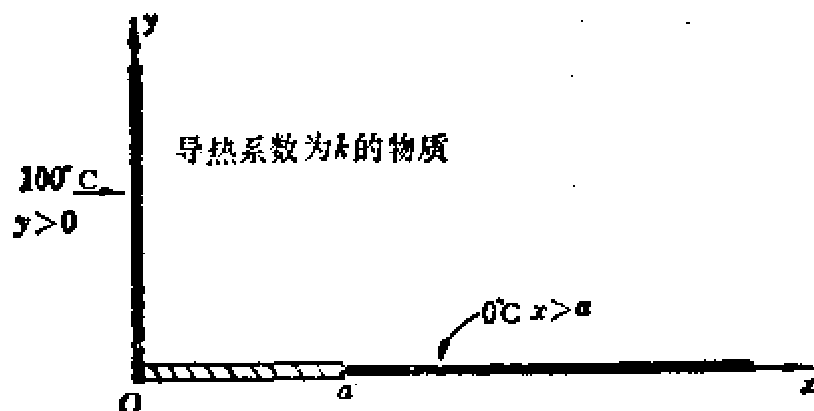


图 4.34

$$\frac{x^2}{a^2\sin^2 u}-\frac{y^2}{a^2\cos^2 u}=1,$$

其中 $u=(100-T)\pi/200$。

(3) 描绘 $T=50°C$ 的等温度线。

15，单位半径导热杆的外部温度如图 4.35 所示，其一半边界是绝热的。证明：杆内的复温度由下式给出：

$$\Phi(z)=50-\frac{100}{\pi}\sin^{-1}\frac{i(z+i)}{z-i},\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant\text{Re}\sin^{-1}(\cdots)\leqslant\frac{\pi}{2}$$

（提示：用分式线性变换把图形映照成例 4-4 中的图 4.18(a)。）

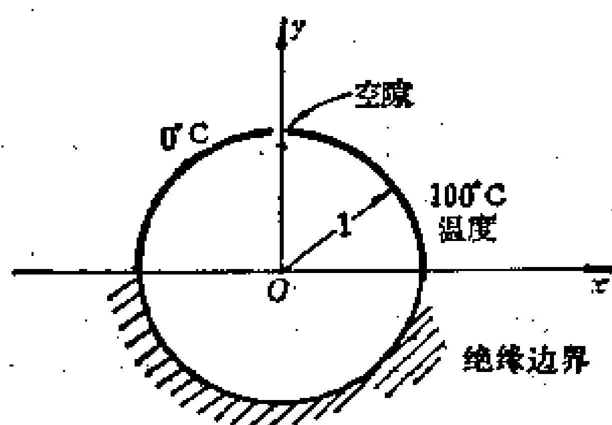


图 4.35

16，当一个不可穿透的刚体障碍物放置于运动的液体中时，没有液体通过物体的表面。因此，在物体表面的每一点，液体速度矢的法向分量必须是零；否则，它将被液体穿透。由于流动与物体的表面相切，它的边界必与流线相重合。

有边界的最简单的液体流动是一致平行于无限平面且在无限平面上方的流动（见图 4.36）。描述这液体流动的复势是 $\Phi=Aw$，其中 A 是实数，$w=u+iv$。对朝向右方的流动，A 是正的；对朝向左方的流动，A 是负的。

(1) 从 Φ 计算复流动速度，并证明这流动确实是一致平行于平面的，即是平行于 u 轴的；

(2) 求流动的流函数 $\psi(u,v)$，ψ 沿边界的值是什么？在图 4.36 上描绘出 $\psi=0,\psi=A,\psi=2A$ 的轨迹。

(3) 图 4.36 中所描述的在空间 $v\geqslant0$ 内的流动被 $z=w^{1/2}$ 变成 z-平面，其中平方根取的是主值支。证明：图 4.36 的平的边界被映照成图 4.37 中的直角边界，并证明图 4.36 中的复速度势 $\Phi(w)$ 被变成 $\Phi(z)=Az^2$，它描述了液体在边界内的流动。

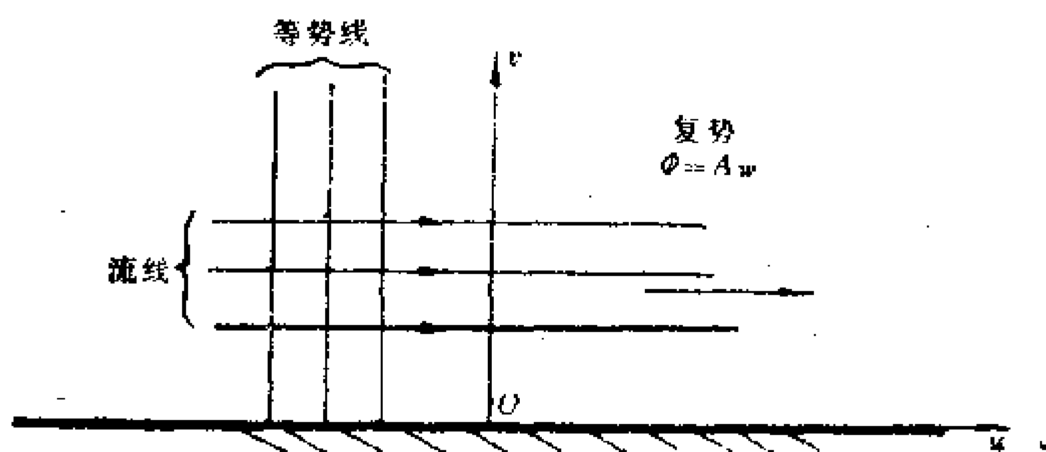


图 4.36

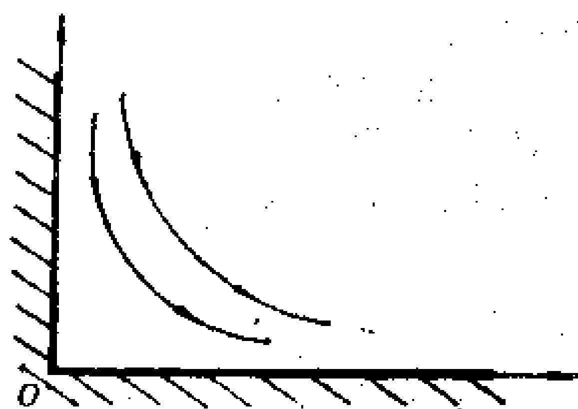


图 4.37

(4) 证明：在角点的流动的复速度是 $2Ax-2iAy$，且液体在一点的流动速度直接随从角点到该点的距离而改变。证明：沿墙壁 $x=0, y>0$，液体流动方向是负 y 轴方向；沿墙壁 $y=0, x>0$，液体的流动方向是正 x 轴方向。

(5) 求流动在拐角处的流函数 $\psi(x,y)$ 的方程，并证明：流线是双曲线，并且其中之一与流动边界相重合。

17. 液体流经 135° 的拐角，如图 4.38 所示。

(1) 证明：描述这流动的复势呈下形式

$$\Phi(z) = Az^{4/3}, \text{其中 } A \text{ 是正实数}$$

（提示：求一变换，它把图 4.36 中的区域 $v \geq 0$ 映照成图 4.38 中的流动区域，并应用这同一变换于图 4.36 中的均匀流动）。

(2) 用 $z=re^{i\theta}$ 把 $\Phi(z)$ 换成极坐标，并证明速度势和流函数分别给出如下：

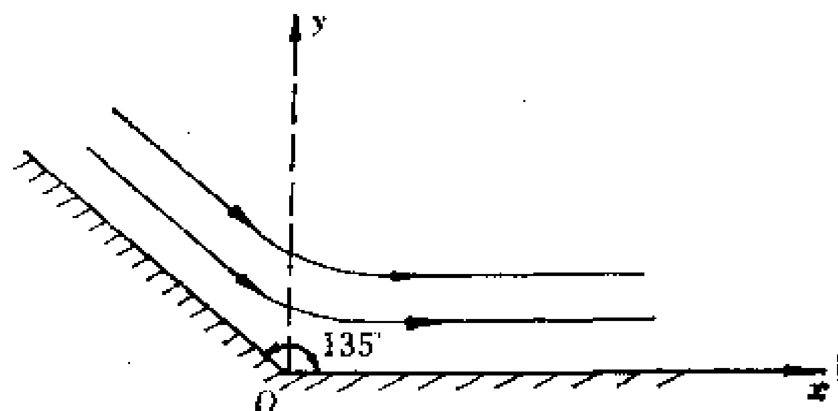


图 4.38

$$\varphi(r,\theta)=Ar^{4/3}\cos\frac{4\theta}{3},\ \psi(r,\theta)=Ar^{4/3}\sin\frac{4\theta}{3}.$$

(3) 用$\psi(r,\theta)$描绘流线$\psi=0$和$\psi=A$。

(4) 求复流动速度，证明：当$\theta=135°$时，液体运动平行于墙壁，而且趋向于顶点。证明：当$\theta=0°$时，液体运动平行于墙壁，而且流动是从顶点流开去。

18. 在这题中，我们将借助变换图4.36中的均匀流动，研究液体流进一个封闭的渠道。这里

$$z=\sin^{-1}w,\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant \operatorname{Re}\sin^{-1}w\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

(1) 证明：图4.36中平坦边界$v=0$被变成图4.39中所示的封闭渠道。

(2) 证明：渠道内的复流动速度是$A\cos x\operatorname{ch}y+\mathrm{i}A\sin x\operatorname{sh}y$。

(3) 证明：沿渠道的左墙，液体流动的方向是负y轴方向；在渠道的终端，液体流动的方向是正x轴方向；沿渠道的右墙，流动方向是正y轴方向。假定$A>0$。

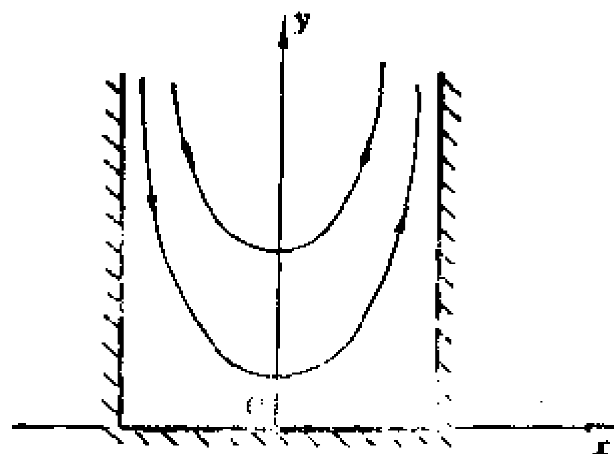


图 4.39

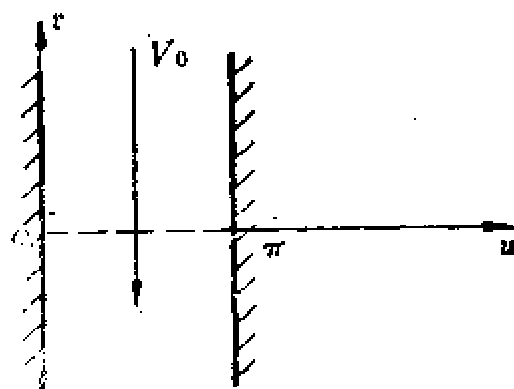


图 4.40

(4) 证明：描述渠道中液体流动的流函数是 $\psi = A\cos x \operatorname{sh} y$。

(5) 在图 4.39 上描绘流线 $\psi = 0, \psi = A/2, \psi = A$。

19.

(1) 液体在宽为 π 的渠道内以均匀速度 V_0 沿图 4.40 所示的方向流动。证明：描述这流动且满足渠道壁是流线要求的复势是 $\Phi = \mathrm{i}V_0 w$。

(2) 用变换 $z = \cos w$ 把这渠道及其流动映照到 z-平面内（参看习题 12）。证明：z-平面上的流动是通过位于平面 $y = 0$ 且宽度为 2 的孔（见图 4.41）。描述 z-平面上这流动的复势是什么？

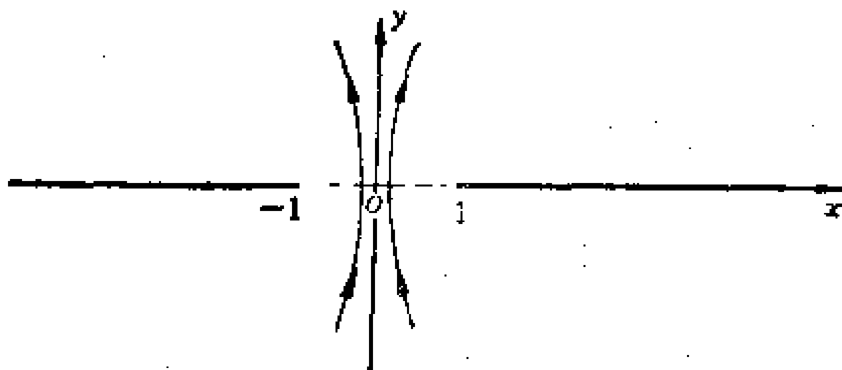


图 4.41

(3) 在孔的中心 $z = 0$ 处，液体以什么速度和沿什么方向流动？

(4) 求通过 $y = 0, x = 1/2$ 这一点的流线方程，并描绘出其轨迹。

(5) 证明远离孔时，即当 $|z| \gg 1$（$|z|$ 充分大）时，流动速度的分量渐近地由下式给出：

$$v_x = \frac{V_0 \cos\theta}{r}, \quad v_y = \frac{V_0 \sin\theta}{r}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,$$

和

$$v_x = \frac{-V_0 \cos\theta}{r}, \quad v_y = \frac{-V_0 \sin\theta}{r}, \quad \pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

其中 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$。

20. 在这题中，我们将研究绕平面上半圆柱障碍物的流动。如图 4.36 所描述的在上半无限平面上的液体流动，被 $z = w/2 + (w^2/4 - 1)^{1/2}$ 所变换，这变换包含两条从 $w = \pm 2$ 向下半面伸展的分支割线。$w = 0$ 的像是 $z = \mathrm{i}$。

(1) 证明：图 4.36 中轴 $v = 0$ 的像是图 4.42 中液体的边界，并且空间 $v > 0$ 被映照成这边界上方的区域（提示：证明我们变换的逆函数是 $w = z + 1/z$，用这个变换把图 4.42 中的边界变成图 4.36 中的实轴 $v = 0$）。

(2) 证明：描述 z-平面上流动的复势是 $\Phi(z) = A(z + z^{-1})$。

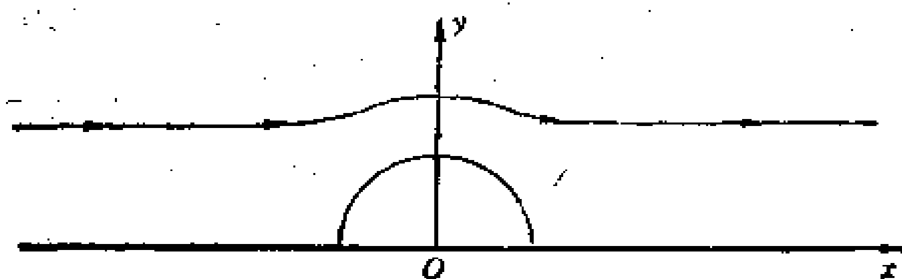


图 4.42

(3) 证明：图 4.42 中复流动速度是 $A(1-1/(\bar{z})^2)$。为什么当我们远离半圆柱障碍物时，它表示图 4.42 中液体是朝右方向的均匀流动？

(4) 设 $z=re^{i\theta}$。证明：描述流动的极坐标下的流函数是 $\psi=A(r-1)\sin\theta$。在与边界相重合的流线上，ψ 的值是什么？在图 4.42 上描绘出 $\psi=A$ 的流线。

§3 许伐茨-克利斯托否公式

热传导、流体力学和静电学中的许多物理问题都有其截口为多角形的边界，我们要在以这种多角形为边界的区域内寻找满足某些边界条件的调和函数。一个一对一的映照 $w=f(z)$，它把 z-平面上的这种多角形区域变成 w-平面的上半平面，并且将多角形边界变成实轴，这对我们解决物理问题是大有帮助的，因为现在得到的是简化的区域形状。在此，我们讨论一些接近于我们所面临且需要解决的问题。许伐茨-克利斯托否(Schwarz-Christoffel)公式是一个很有用的变换公式，它将把 w-平面上的实轴（即 u 轴）变成 z-平面上的多角形，一旦获得了这种变换公式（常常是个困难的工作），其逆变换有时能被利用来产生所要求的 $w=f(z)$。

对许伐茨-克利斯托否公式的严格推导，我们将不予介绍，我们将首先使读者确信它的有理性，然后，继续讨论它的一些应用例子。

为了察看公式是如何起作用的，我们考虑简单的变换

$$z=(w-u_1)^{\alpha_1/\pi},\quad 0\leqslant\alpha_1\leqslant2\pi,\tag{4-76}$$

其中$(u_1,0)$是 w-平面实轴上的一个点。方程(4-76)是借助从点 $w=u_1$ 出发且进入下半平面的分支割线来定义的。使方程(4-76)两边的幅角相等，我们有

$$\arg z=\frac{\alpha_1}{\pi}\arg(w-u_1)。\quad (4\text{-}77)$$

若 w 是大于 u_1 的实数，我们取 $\arg(w-u_1)=0$，由方程(4-77)，则

$$\arg z=0。\quad (4\text{-}78)$$

若 w 是小于 u_1 的实数，我们有 $\arg(w-u_1)=\pi$，由方程(4-77)，则

$$\arg z=\alpha_1。\quad (4\text{-}79)$$

方程(4-76)指出，点 $w=u_1$ 和 $z=0$ 互为映像。现在，让我们参考图4-43(a)，(b)。若我们考虑 u 轴上位于 $w=u_1$ 右方的直线段，按照方程(4-78)，它必定被变成 z-平面上从原点射出且位于正 x 轴的直线段；而位于 $w=u_1$ 左方的直线段，按照方程(4-79)，必定被变成一条从原点出发且与正 x 轴夹角为 α_1 的射线。

总之，$z=(w-u_1)^{\alpha_1/\pi}$ 把位于 u 轴上且经过点 $w=u_1$ 的直线段弯成一对直线段，它们在 z-平面上交于原点，且夹角为 α_1。将较复杂的变换

$$z=C_1(w-u_1)^{\alpha_1/\pi}+C_2\quad (4\text{-}80)$$

应用于图 4.43(a)的直线，所产生的一对线段表示在图 4.43(c)中，其夹角仍是 α_1，但是线段不再从原点射出，一般地，是将图 4.43(b)所示的一对直线段进行了旋转。

变换 $w=f(z)$ 同时把 u 轴上的若干直线段弯成 z-平面上的若干对直线段，这些对直线段应交于不同位置的点且夹角不同，原则上，它

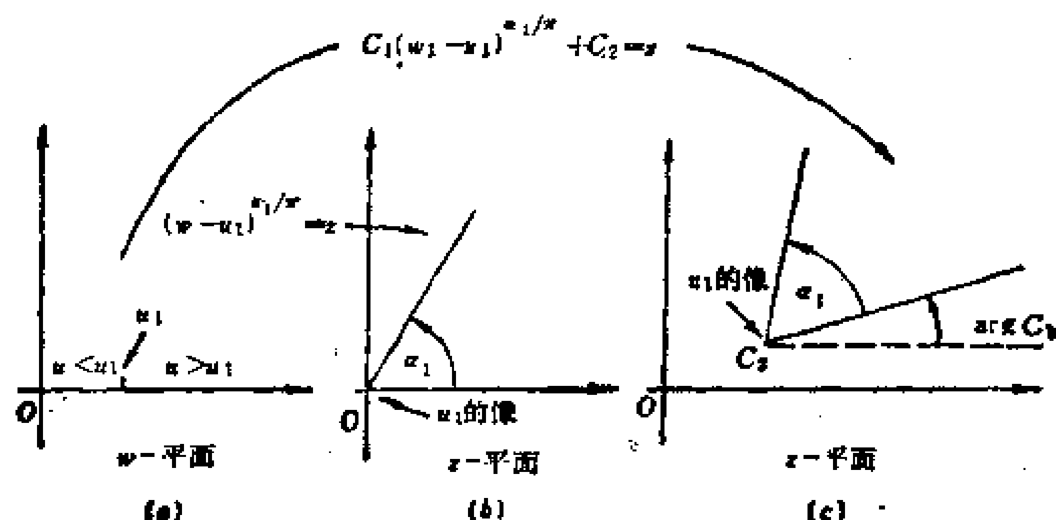


图 4.43

把整个 u 轴变成 z-平面上的多角形。

注意从方程(4-80)，即得

$$\frac{dz}{dw}=C_1\frac{\alpha_1}{\pi}(w-u_1)^{\alpha_1/\pi-1}。$$

为了把 u 轴变成多角形，这启示我们考虑下列公式

$$\frac{dz}{dw}=A(w-u_1)^{(\alpha_1/\pi-1)}(w-u_2)^{(\alpha_2/\pi-1)}\cdots(w-u_n)^{(\alpha_n/\pi-1)},$$

其中$(u_1,0)$，$(u_2,0)$，…，$(u_n,0)$是多角形顶点在 w-平面上的像，而α_1，α_2，…，α_n 是 z-平面上多角形之两相邻边的夹角。事实上，我们关于这公式的假设是正确的，并且总结成下述定理。

定理 1 （许伐茨-克利斯托否公式） w-平面上的实轴被下述公式(4-81)或(4-82)变成 z-平面上的多角形，它有 n 个顶点 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 和对应的内角 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$：

$$\frac{dz}{dw}=A(w-u_1)^{(\alpha_1/\pi-1)}(w-u_2)^{(\alpha_2/\pi-1)}\cdots(w-u_n)^{(\alpha_n/\pi-1)},\quad(4-81)$$

或者

$$z=A\int^{w}(\zeta-u_1)^{(\alpha_1/\pi)-1}(\zeta-u_2)^{(\alpha_2/\pi)-1}\cdots(\zeta-u_n)^{(\alpha_n/\pi)-1}d\zeta+B,$$

(4-82)

其中 $u_1<u_2<\cdots<u_n$，并且$(u_1,0)$，$(u_2,0)$，…，$(u_n,0)$ 被映照成顶点 $z_1,z_2,\cdots,z_n$。若 $w=\infty$ 被映照成一个顶点，比如说 z_j，则在方程(4-81)中包含$(w-u_j)$的项消失了，方程 (4-82) 中包含 $(\zeta-u_j)$ 的项不出现了。多角形的大小和方向由 A 和 B 决定。半平面 $\text{Im}\, w>0$ 被映照成多角形的内部。公式(4-81) 和 (4-82) 称为许伐茨-克利斯托否变换公式。

在方程(4-82)中，积分的下限没有被指定。读者能任意地选取这个量。但是应注意，能提出的任何常数都能被吸收到 B 中去，积分是对假变量 ζ 进行的。对方程 (4-82)的两边关于 w 求导数，便得到方程(4-81)。

为了考察变换如何起作用，由方程(4-81)。我们有

$$dz=A(w-u_1)^{(\alpha_1/\pi)-1}(w-u_2)^{(\alpha_2/\pi)-1}\cdots(w-u_n)^{(\alpha_n/\pi)-1}dw。$$

令两边的幅角相等，我们有

$$\mathrm{Arg}dz=\mathrm{Arg}A+\left(\frac{\alpha_1}{\pi}-1\right)\mathrm{Arg}(w-u_1)+\left(\frac{\alpha_2}{\pi}-1\right)\mathrm{Arg}(w-u_2)$$

$$+\cdots+\left(\frac{\alpha_n}{\pi}-1\right)\mathrm{Arg}(w-u_n)+\mathrm{Arg}\,d\,w。\qquad(4\text{-}83)$$

现在，我们想象点 w 位于图 4.44(b)中标记为 P 的位置，我们带 P 走到 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 的左侧。

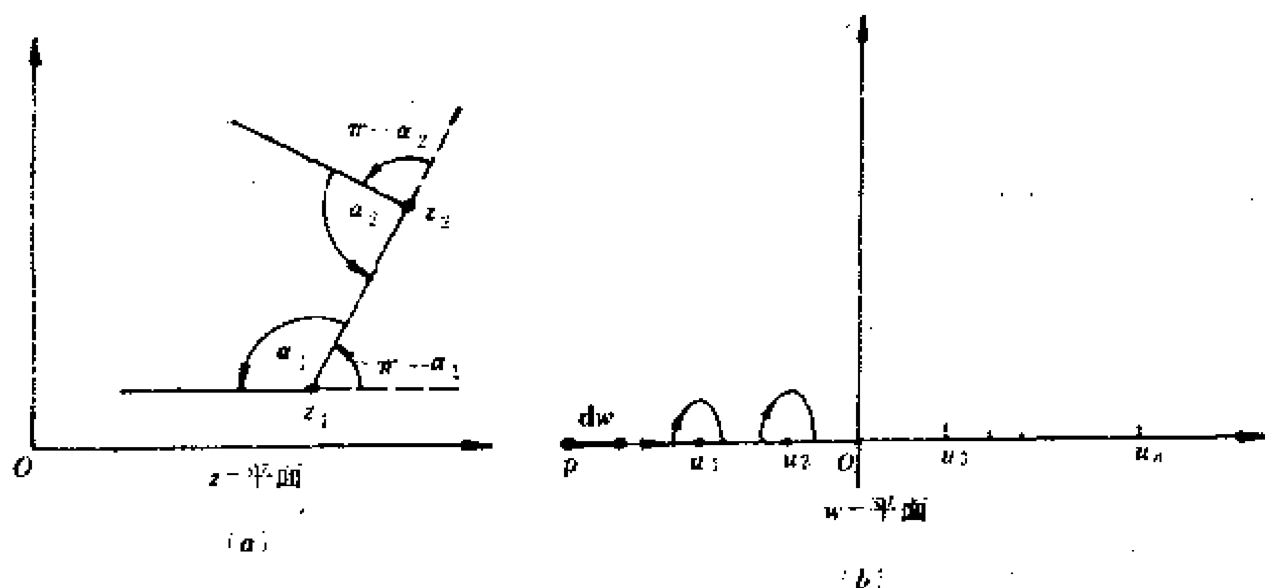


图 4.44

当 w 沿实轴通过增量 $dw=du$ 走向 u_1 时，我们有 $\mathrm{Arg}d\,w=0$。当 w 在 u_1 的左侧时，由于$(w-u_1)$，$(w-u_2)$，$\cdots$，$(w-u_n)$全是负数，所以在方程(4-83)中，这些项的幅角全部为 π，而且当 w 向 u_1 行进时，这个方程中的 $\mathrm{Arg}\,d\,z$ 保持为常数。当 w 沿直线轨迹移动时，$d\,z$ 的幅角只能保持不动。因此，当 w 在图 4.44(b)中移向 u_1 时，由方程(4-81)或(4-82)所定义的 z 之轨迹是线段。

当 w 经过 u_1 时，方程(4-83)中的 $\mathrm{Arg}(w-u_1)$突然减少了 π。但是，这个方程右端中的所有其他的幅角保持为原来的值。按照方程(4-83)，$\mathrm{Arg}\,d\,z$ 的值将有突然的变化，它下降了$((\alpha_1/\pi)-1)\pi=\alpha_1-\pi$或增加了 $\pi-\alpha_1$。现在 w 位于 u_1 的右侧，若 w 沿 u 轴移向 u_2，则 $\mathrm{Arg}dz$ 保持为新的值，且 z-平面上的轨迹是线段。幅角增加了 $\pi-\alpha_1$

使得 z-平面上的两条线段交于点 z_1，且具有夹角 α_1（见图 4.44(a)）。

当 w 继续沿 u 轴移动至 u_2 右侧时，如图 4.44(b) 中所示，由方程(4-83)，我们看到 $\operatorname{Arg} dz$ 将突然增加 $\pi-\alpha_2$，而且当 w 在 u_2 与 u_3 之间移动时，在 z-平面上产生新的线段，它与前一线段的夹角是 α_2。据此方法，当 w 在 w-平面上沿整个实轴从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 前进时，由方程(4-81)或(4-82)所定义的变换在 z-平面上产生了整个多角形。

由平面几何学，我们知道，闭多角形的外角之和是 2π。在图4.44(a)中，在顶点 z_1 处的外角是 $\pi-\alpha_1$，在顶点 z_2 处的外角是 $\pi-\alpha_2$，等等。于是

$$(\pi-\alpha_1)+(\pi-\alpha_2)+\cdots+(\pi-\alpha_n)=2\pi。$$

若将上式两边除以 2π，然后乘上 (-1)，我们得到一个关系式，即若 u 轴被变成一个闭多角形，则方程(4-81)和(4-82)中的指数必须满足关系式：

$$\frac{\alpha_1}{\pi}-1+\frac{\alpha_2}{\pi}-1+\cdots+\frac{\alpha_n}{\pi}-1=-2。\tag{4-84}$$

这个关系式在下述例 4-5 和 4-6 中是满足的，但在例 4-7 中是不满足的，那里讨论的是一个开多角形。

若闭多角形的一个顶点，比如说 z_n，是 $u_n=\infty$ 的映像，我们看方程(4-81)或(4-82)必须如何修改。作分式线性变换

$$\zeta=\frac{1}{u-w},\quad u<u_1,\tag{4-85}$$

它把上半 w-平面映照为上半 ζ-平面，实轴映照为实轴，$u_1<u_2<\cdots<u_{n-1}$，$u_n=\infty$ 分别变为 $\eta_1<\eta_2<\cdots<\eta_{n-1}<\eta_n=0$。于是，变换(4-85)与(4-82)的复合变换把上半 ζ-平面映照成多角形的内部，并且把 η_j 映照为 $z_j(j=1,2,\cdots,n)$。由方程(4-81)，我们有

$$\frac{dz}{d\zeta}=A(\zeta-\eta_1)^{\lambda_1-1}(\zeta-\eta_2)^{\lambda_2-1}\cdots(\zeta-\eta_{n-1})^{\lambda_{n-1}-1}\zeta^{\lambda_n-1},\tag{4-86}$$

其中 $\lambda_j=\alpha_j/\pi(j=1,2,\cdots,n)$。由于

$$\frac{dz}{dw}=\frac{dz}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dw}=\frac{1}{(u-w)^2}\frac{dz}{d\zeta},\tag{4-87}$$

将方程(4-85)和(4-86)代入上述方程，我们有

$$\frac{dz}{dw}=\frac{A}{(u-w)^2}\prod_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{u-w}-\eta_j\right)^{\lambda_j-1}\cdot\left(\frac{1}{u-w}\right)^{\lambda_n-1}$$

$$=\frac{A\prod_{j=1}^{n-1}(\eta_j)^{\lambda_j-1}\prod_{j=1}^{n-1}(w-u+1/\eta_j)^{\lambda_j-1}}{(u-w)^{(\lambda_1-1)+(\lambda_2-1)+\cdots+(\lambda_n-1)+2}}。\quad (4\text{-}88)$$

由于$(\lambda_1-1)+(\lambda_2-1)+\cdots+(\lambda_n-1)=-2$，$1/\eta_j=u-u_j(j=1,2,\cdots,n-1)$，因此，由方程(4-88)我们有

$$\frac{dz}{dw}=A_1(w-u_1)^{\lambda_1-1}(w-u_2)^{\lambda_2-1}\cdots(w-u_{n-1})^{\lambda_{n-1}-1}。\quad (4\text{-}89)$$

方程(4-89)表明，如果$u_n=\infty$，那么许伐茨-克利斯托否变换公式(4-81)和(4-82)中包含u_n的那个因子将不出现。

综上所述，许伐茨-克利斯托否变换(4-82)把w-平面上的实轴一对一地变为以$z_1,z_2,\cdots,z_n$为顶点的多角形。它是否也能把上半w-平面单叶地共形映照成多角形的内部呢？回答是肯定的，不过我们将不在此给出证明。读者可参考更高深的教科书。但是，值得注意的是，当$u_1,u_2,\cdots,u_n$顺序地沿u轴从左至右排列时，则对应点$z_1,z_2,\cdots,z_n$的顺序关于多角形的内部区域是正的，即当我们沿多角形从z_1到z_2、从z_2到z_3、…、从z_n到z_1前进时，多角形的内部始终是在前进方向的左侧。

另一个重要的事实是，当在z-平面上给定以$z_1,z_2,\cdots,z_n$为顶点的一个多角形时，许伐茨-克利斯托否变换能建立u轴与多角形之间的对应，使得三个顶点，比如是z_1,z_2,z_3，对应于u轴上任意选定的三个不同点，比如是$u_1<u_2<u_3$，而其它$(n-3)$个顶点的像的位置$u_4<u_5<\cdots<u_n$则也就被确定了。

例 4-5 求许伐茨-克利斯托否变换，它把w-平面上的实轴映照成如图4.45(a)所示的等腰三角形。三角形之顶点对应于$u_1=-a$，$u_2=a$，$u_3=\infty$（如图4.45(b)中所示）。

解 对顶点z_1，我们有$\alpha_1=\pi/4$，且其像点是$u_1=-a$。对顶点z_2，

---

① 例如，R. Nevanlina and V. Paatero, Introduction to Complex Analysis, Mass, Addison-Wesley, 1969.

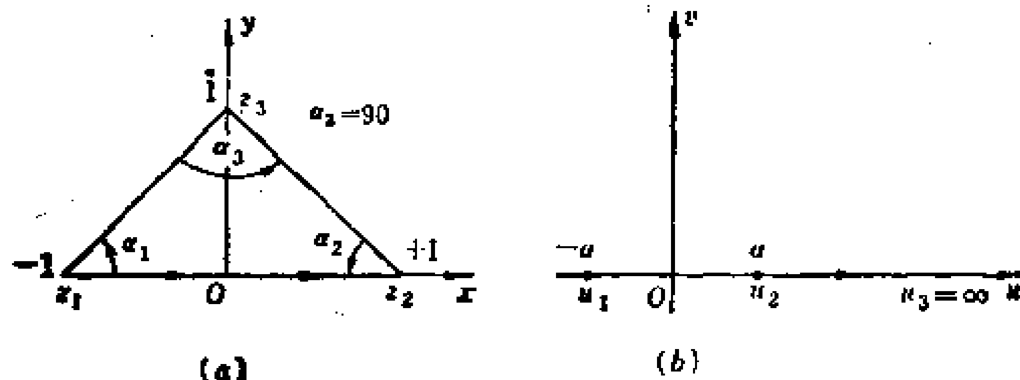


图 4.45

我们有 $\alpha_2=\pi/4$ 及其像 $u_2=a$。最后，对顶点 z_3，我们有 $\alpha_3=\pi/2$ 及其像 $u_3=\infty$。由于 $w=\infty$ 被映照为 z_3，则公式(4-82)中包含 u_3 和 α_3 的项将不出现。利用这个公式，并取积分下限为 0，我们得到

$$z=A\int_0^w(\zeta+a)^{-3/4}(\zeta-a)^{-3/4}d\zeta+B$$

$$=A\int_0^w(\zeta^2-a^2)^{-3/4}d\zeta+B。\qquad(4-90)$$

这个积分不能用常规的函数来计算。对每个感兴趣的 w，必须要用数值法来求。为了确定 A 和 B，我们要求它满足条件：当 $w=a$ 时，$z=z_2=+1$；当 $w=-a$ 时，$z=z_1=-1$。于是，由方程(4-90)有

$$1=A\int_0^a(\zeta^2-a^2)^{-3/4}d\zeta+B,\qquad(4-91)$$

$$-1=A\int_0^{-a}(\zeta^2-a^2)^{-3/4}d\zeta+B。\qquad(4-92)$$

对方程(4-92)中的积分进行变数变换，并在两边乘以(-1)，有

$$1=A\int_0^a(\zeta^2-a^2)^{-3/4}d\zeta-B。\qquad(4-93)$$

将方程(4-91)与(4-93)的两边分别相加，我们得到

$$2=2A\int_0^a(\zeta^2-a^2)^{-3/4}d\zeta。$$

解之，即得

$$A=\frac{1}{\int_0^a(\zeta^2-a^2)^{-3/4}d\zeta},\qquad(4-94)$$

它也必须用数值方法求值。把这个结果代入方程(4-91)，我们看到，$B=0$。将所求得的 A 和 B 的值代入方程(4-90)，我们有

$$z=\frac{\int_0^w(\zeta^2-a^2)^{-3/4}\mathrm{d}\zeta}{\int_0^a(\zeta^2-a^2)^{-3/4}\mathrm{d}\zeta}, \tag{4-95}$$

这就是我们所要求的变换。

例 4-6 求许伐茨-克利斯托否变换，它把半平面 $\mathrm{Im}\,w>0$ 映照成半无限条形 $\mathrm{Im}z>0$，$-1<\mathrm{Re}\,z<1$。

解 从图 4.46(a)我们看到，条形（退化的多角形）能看成是三角形的极限情形，它的顶点移至无穷远点。在此极限下，$\alpha_1=\pi/2$，$\alpha_2=\pi/2$，$\alpha_3=0$。由图 4.46(b)，我们有 $u_1=-1$，$u_2=1$，$u_3=\infty$。把上述 α 和 u 的值代入方程(4-82)（没有任何含 u_3 的项），我们有

$$z=A\int^w(\zeta+1)^{-1/2}(\zeta-1)^{-1/2}\mathrm{d}\zeta+B=A\int^w\frac{\mathrm{d}\zeta}{(\zeta^2-1)^{1/2}}+B。\tag{4-96}$$

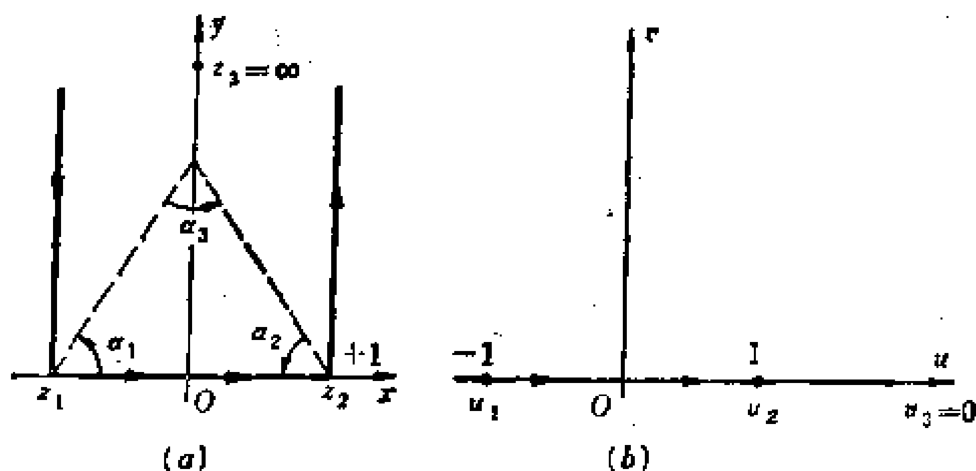


图 4.46

为了简化最后的答案，我们记 $A/\mathrm{i}=A_1$，于是

$$\frac{A}{(\zeta^2-1)^{1/2}}=\frac{A_1}{(1-\zeta^2)^{1/2}},$$

方程(4-96)成为

$$z=A_1\int^w\frac{\mathrm{d}\zeta}{(1-\zeta^2)^{1/2}}+B。$$

容易求得上述不定积分，且将常数吸收到 B 中去，于是

$$z=A_1\sin^{-1}w+B。\tag{4-97}$$

由于 $w=1$ 被映照成 $z=1$，则从上式有

$$1=A_1\sin^{-1}1+B=A\frac{\pi}{2}+B。\tag{4-98}$$

类似地，由于 $w=-1$ 被映照成 $z=-1$，从方程(4-97)，我们有

$$-1=A_1\sin^{-1}(-1)+B=-A_1\frac{\pi}{2}+B。\tag{4-99}$$

同时解最后这两个方程，我们发现 $B=0$，$A_1=2/\pi$。于是方程(4-97)成为

$$z=\frac{2}{\pi}\sin^{-1}(w)。\tag{4-100}$$

例 4-7 求一变换，它把半平面 $\mathrm{Im}\,w>0$ 映照成图 4.47(a)所示的半条形的外部区域，边界点 u_1 和 u_2 被映照成点 z_1 和 z_2。

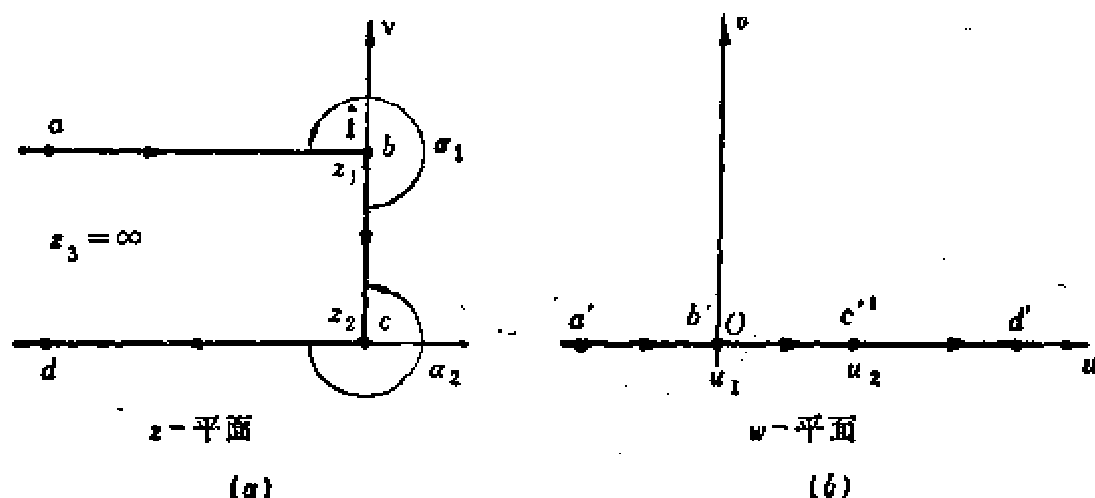


图 4.47

解 当我们沿实轴(u 轴)由左至右行进时，对应的像点按图 4.47(a) 中箭头所指的方向前进。此时，多角形的“内部”，我们把它看成为半条形的外部区域，应在我们前进方向的左方，如我们规定的路径为 a,b,c,d。设 $z_3=\infty$是 $u_3=\infty$的映像，$z_2=0,z_1=i$ 分别是 $u_2=1$，$u_1=0$ 的映像，并注意，$\alpha_1=3\pi/2,\alpha_2=3\pi/2$。于是，由方程(4-82)，我们有

$$z=A\int^{w}\zeta^{1/2}(\zeta-1)^{1/2}d\zeta+B。$$

用 $i(1-\zeta)^{1/2}$代替$(\zeta-1)^{1/2}$ 并将 i 吸收到 A 中，我们得到

$$z=A\int^{w}\zeta^{1/2}(1-\zeta)^{1/2}d\zeta+B。$$

上述积分可用积分表来计算。于是

$$z=\frac{A}{4}\left[(2w-1)(w(w-1))^{1/2}-\frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(w(w-1)^{1/2}+w-\frac{1}{2}\right)\right]+B。\tag{4-101}$$

当 $w=0$ 时，我们要求 $z=i$，于是，由方程(4-101)，我们有

$$i=\frac{A}{4}\left(-\frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)+B。$$

适当选取对数的主值，我们有

$$i=\frac{A}{8}[\log 2-i\pi]+B。\tag{4-102}$$

当 $w=1$ 时，我们要求 $z=0$，由方程(4-101)，则得

$$0=\frac{A}{4}\left[-\frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(\frac{1}{2}\right)\right]+B。$$

适当选取对数的主值，则得

$$0=\frac{A}{8}\operatorname{Log}2+B。\tag{4-103}$$

同时解方程(4-102)和(4-103)，我们得到

$$A=-\frac{8}{\pi},\quad B=\frac{\log 2}{\pi}。$$

将它们代入方程(4-101)，我们有

$$z=-\frac{2}{\pi}\left[(2w-1)(w(w-1))^{1/2}-\frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(w(w-1)^{1/2}+w-\frac{1}{2}\right)\right]+\frac{\log 2}{\pi}。\tag{4-104}$$

我们可证实，适当选取分支，则点 $w=1/2$ 可被映照成 z-平面虚轴上介于 0 和 1 之间的一点。例如，把 $w=1/2$ 代入方程(4-104)，我们有

$$z=-\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(-\frac{1}{4}\right)^{1/2}\right]+\frac{\log 2}{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}\operatorname{Log}\left(\pm\frac{i}{2}\right)+\frac{\log 2}{\pi}。$$

在上式中用 $+i$ 及其对数的主值，我们得到 $z=i/2$。

读者应将 u 轴上的若干个点映照到 z-平面，并且确信图 4.47(a) 中所期望的映照是能达到的，即我们

(1) 在方程(4-104)中用 Log 的主值支，并且

(2) 借助从 $w=0$ 和 $w=1$ 伸向下半 w-平面的分支割线来定义 $f(w)=(w(w-1))^{1/2}$，并且当 $w>1$ 时取 $f(w)>0$。

习　题

1. 由方程(4-81)和(4-82)所定义的映照对 $w=u_1$ 和 $w=u_2$ 等是共形的吗？为什么？

2. 用许伐茨-克利斯托否变换公式求一变换，把图 4.48 中的扇形映照到上半 w-平面，把 A 映照成$(-1,0)$，B 映照成$(0,0)$，C 映照成 ∞。

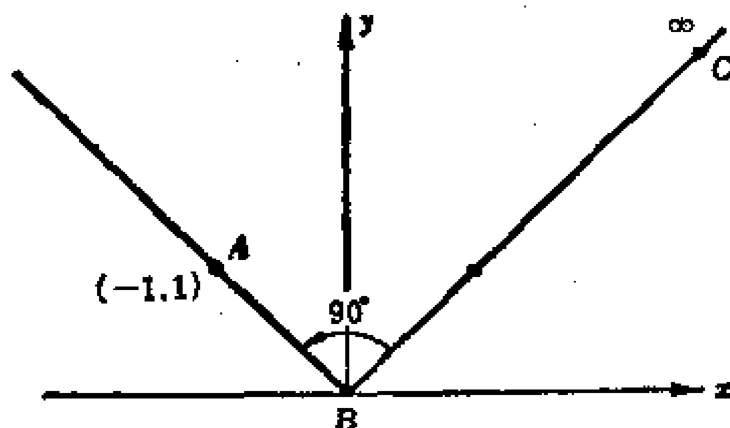


图 4.48

3. 用许伐茨-克利斯托否变换公式求一变换，它把图 4.49 中的区域映照成上半 w-平面，把 $z=0$ 映照成 $w=-1$，把 $z=i$ 映照成 $w=0$，把 $z=0+$ 映照成 $w=1$（提示：当 α_1，α_2 和 α_3 达到适当的值时，把图 4.49 中的边界看成是图4.50中所画边界的极限）。

4.

(1) 求一变换，它把上半 w-平面映照成 z-平面，如图 4.51(a) 所示的区域，边界上的映照如图 4.51(a)，(b)所示（提示：当 $\alpha_1\to3\pi/2$ 和 $\alpha_2\to0$ 时，把图 4.51(a)中的区域看成为如图 4.51(c)中所示区域的极限。

答案为

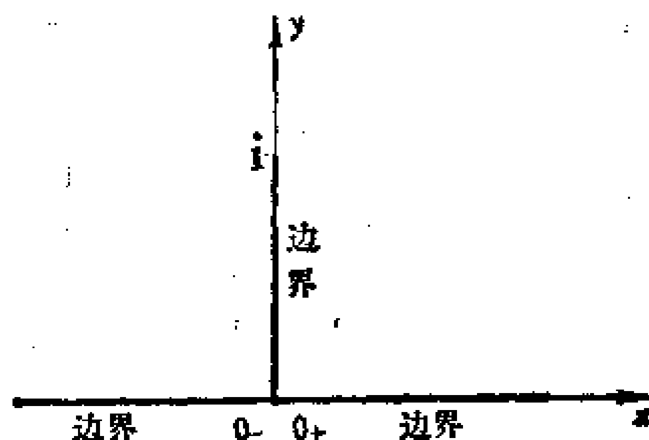


图 4.49

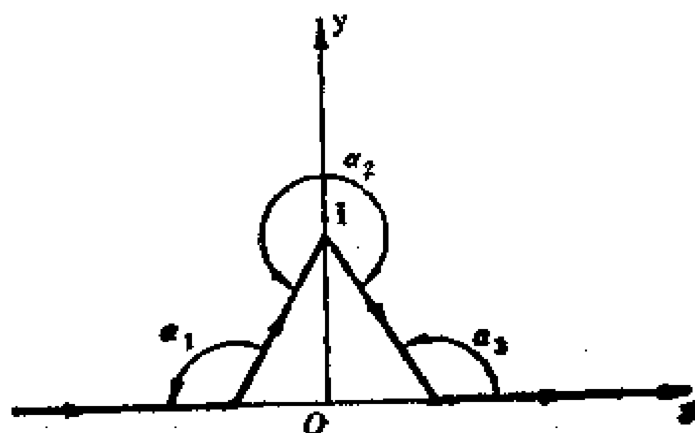


图 4.50

$$z=\frac{2}{\pi}(1+w)^{1/2}+\frac{1}{\pi}\log\left(\frac{(1+w)^{1/2}-1}{(1+w)^{1/2}+1}\right). \tag{4-105}$$

(2) 让图 4.51(*a*)中折线 a,b,c 是一导体的截口，电压保持为 V_0 伏特，令直线 c,d 是另一导体的截口，电压保持为 0 伏特，用(1)中所得到的结果，证明：若 $|z|\gg 1$ 和 $\mathrm{Re}z\geqslant 0$，则静电势是 $\varphi(x,y)\approx(2V_0/\pi)\arg z$，且流函数 $\psi(x,y)\approx-(2V_0/\pi)\log|\pi z/2|$。描绘出这些近似的等势线和流线。

(3) 用方程(4-105)证明：若 $\mathrm{Re}z\ll -1$ 和 $0\leqslant\mathrm{Im}z\leqslant 1$，则静电势是 $\varphi(x,y)\approx V_0 y$，流函数 $\psi(x,y)\approx -V_0 x$ （提示：对 $|w|\ll 1$，由马克劳林(Maclaulin)展开式，我们有

$$\frac{(1+w)^{1/2}-1}{(1+w)^{1/2}+1}\approx\frac{w}{4}.$$

在 z-平面上对可用 $\varphi(x,y)$ 和 $\psi(x,y)$ 的近似公式的地方，描绘流线和等势线。用这草图及(2)中所发现的，猜测上方导体中在靠近弯曲处的流线和等势线）。

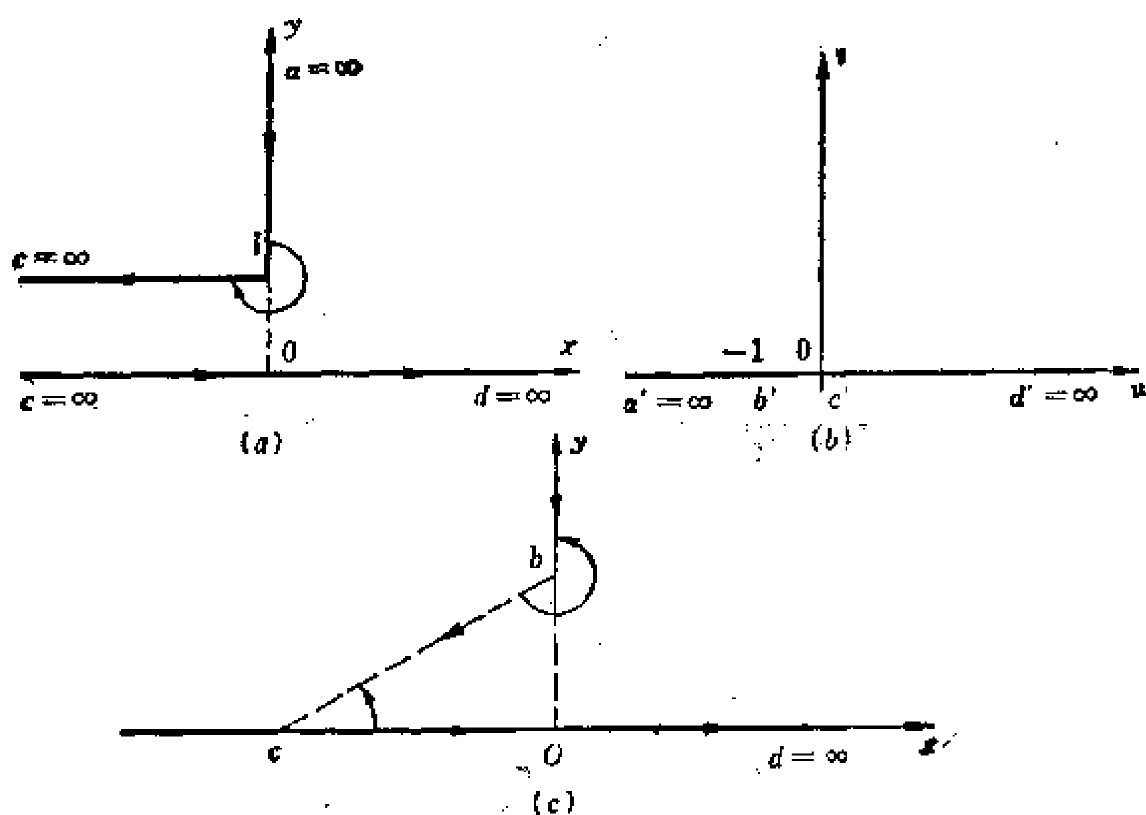


图 4.51

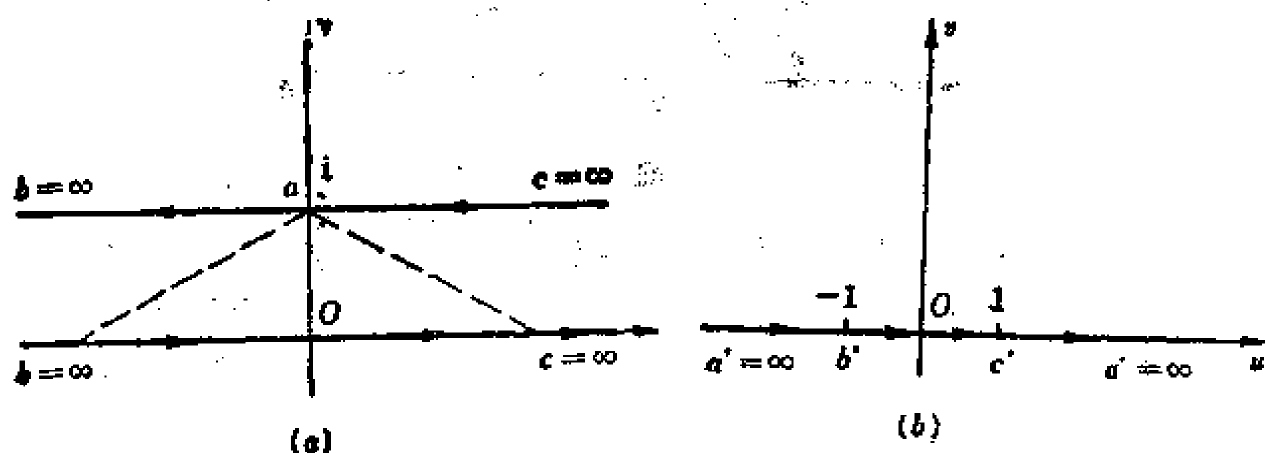


图 4.52

5.

(1) 求一映照，它把上半 w-平面映照成条形区域 $0<\mathrm{Im}z<1$，其边界上的映照如图 4.52 所示（提示：把上述水平条形看成是图 4.52 中破折线所成三角形的极限）。

(2) 假设 z-平面上的直线 $y=1$ 是一个导体的截口，电压保持为 1 伏特；而 $y=0$ 是另一导体的截口，电压保持为 0 伏特。人们容易求出条形区域 $0\leqslant y\leqslant 1$

上的复势。利用(1)中所找到的变换，求上半 w-平面上的 $\Phi_1(w)$，并求出 $\varphi_1(u, v)=\mathrm{Re}\Phi_1(w)$。

(3) 在直线 $v=0$ 上，$\varphi_1(u,v)$满足什么边界条件?

6.

(1) 求一映照，它把上半 w-平面映照成 z-平面上如图 4.53 所示的区域，边界映照如图 4.53 所示。求这变换的逆函数即得 w 是 z 的函数，并描述所得函数的适当的分支（提示：考虑图 4.54，令所标出的角趋于适当的极限值）.

(2) 令图 4.53(b)中的 $k=1$，假设图 4.53(a)中的区域是导热体的截口，直线 $y=0, -\infty<x<0$ 表示边界，其温度保持为 0°C，而直线 $y=\pm 1, -\infty<x<\infty$ 均是边界，且其温度均保持为 1°C；用(1)所得到的变换和习题 5(2)的结果，求受热体的复温度。

(3) 描绘出沿直线 $x=0$，$0\leqslant y\leqslant 1$ 和沿直线 $y=0, 0\leqslant x\leqslant 2$ 随距离变化的实际温度 $\varphi(x,y)$。

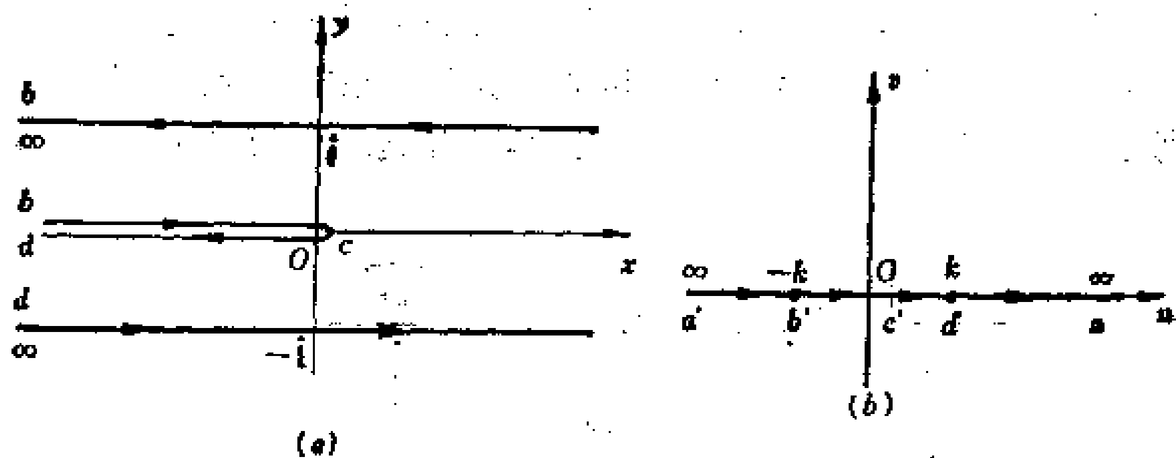


图 4.53

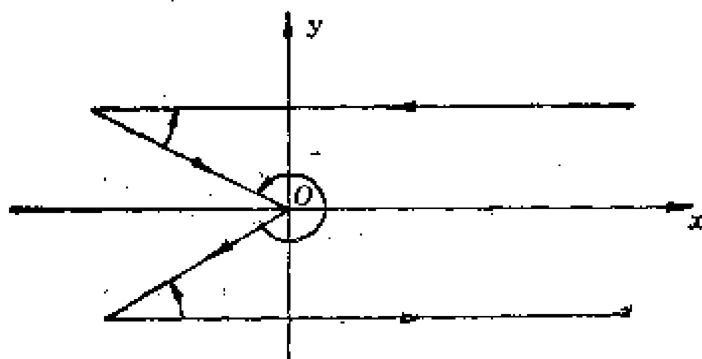


图 4.54

附录 流函数和电容量

在这里，我们将说明流函数 $\psi(x,y)$ 在电容中的计算，它在液体流动中也是有用的。记得在第一章的§2.5中，穿过面积为 dS 的微分曲面的电流是

$$df=D_n dS, \tag{4-106}$$

其中 D_n 是曲面上电流密度向量 D 的法向分量。现在考虑长度为 dy 和 dx 的截口的曲面，如图 4.55(*a*)所示。假定每一曲面在垂直于纸张的方向上长度为1单位，穿过垂直曲面的流量是 $D_x\,dy$，而穿过水平曲面的流量是 $D_y\,dx$。

现在考虑简单闭围道 C，如图 4.55(b)所示，C 是垂直于水平纸张的单位长度的圆柱体的截口。我们要找一个计算从圆柱体内往外流出的全部电流的式子。令 $dz=dx+i\,dy$ 是沿 C 的距离增量，如图 4.55(*b*)所示。越过截口为 dz 的曲面的流量 df 是越过曲面在 x 轴和 y 轴

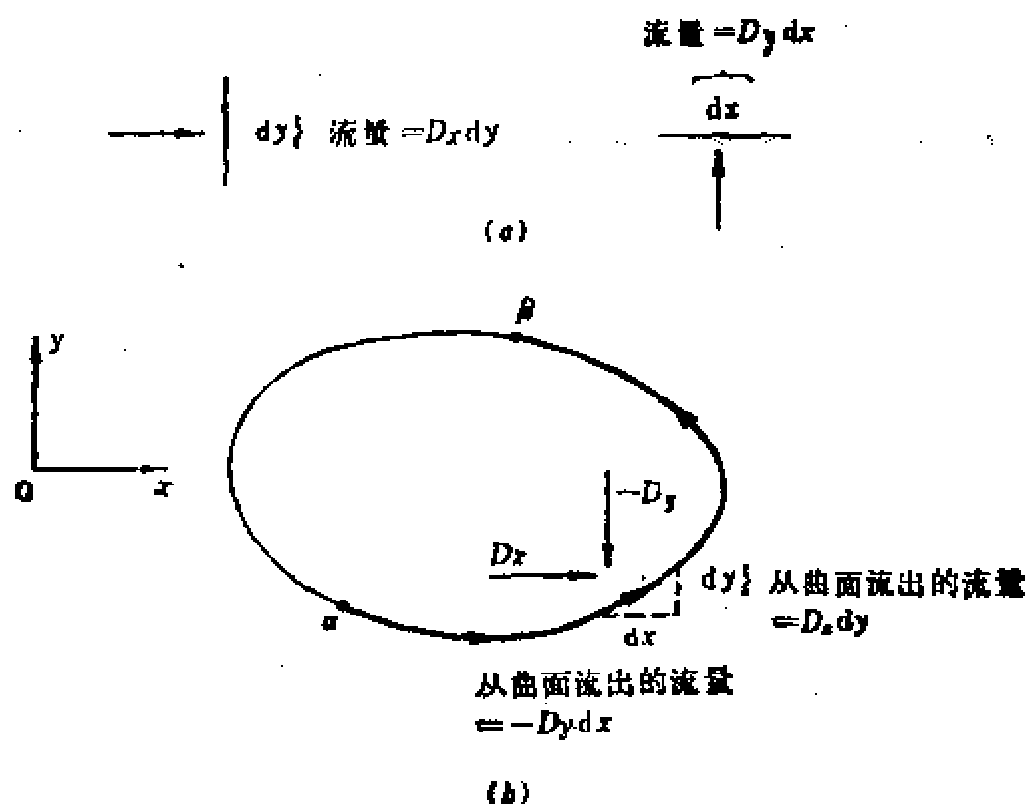


图 4.55

上投影的流量之和，这些投影的面积分别是 d x 和 d y。于是

$$df=D_x dy-D_y dx。$$

D_y 前出现负号是因为我们计算的是往外的流量，即从圆柱体内部往外流出的流量。沿截口 C 上联接 α 和 β 的弧线的曲面往外流出的流量是

$$f_{\alpha\beta}=\int_{\alpha}^{\beta} D_x dy-D_y dx, \tag{4-107}$$

其中从 α 到 β 的求积方向关于圆柱体的内部是正的。

借助于第一章 § 2.5 中的方程(1-66)和 $D=\varepsilon E$，我们有

$$D_x=-\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad D_y=-\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

其中 ε 是周围介质的可导电性，$\varphi(x,y)$ 是静电势，方程(4-107) 可改写成

$$f_{\alpha\beta}=\int_{\alpha}^{\beta} -\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x}dy+\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial y}dx。 \tag{4-108}$$

由于流函数 $\psi(x,y)$ 是 $\varphi(x,y)$ 的共轭调和函数，因此，据柯西-黎曼方程，我们有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}。$$

于是方程(4-108)能改写成

$$f_{\alpha\beta}=-\varepsilon\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\partial\psi}{\partial y}dy+\frac{\partial\psi}{\partial x}dx。$$

由于被积函数是全微分 d ψ，因此，我们立刻有

$$f_{\alpha\beta}=-\varepsilon\int_{\alpha}^{\beta}d\psi=\varepsilon[\psi(\alpha)-\psi(\beta)]。 \tag{4-109}$$

可见，ε 与在 α 和 β 点的流函数值之差 $[\psi(\alpha)-\psi(\beta)]$ 的乘积，就是越过截口 C 上联接 α 与 β 的弧线之曲面的流量。让我们沿图 4.55 中的闭围道 C 周游一周，并计算 ψ 的改变量（即起始值减最终值）。由于 ψ 典型地是多值函数的一个分支，它是借助分支割线来确定的，所以 ψ 的改变量 $\Delta\psi$ 可能是非零的。由此可知：

越过截口为 C 的闭曲面的总流量是 $\varepsilon\Delta\psi$，根据高斯定律，它恰好等于在曲面上或环绕曲面的电荷。

当两个导体保持不同的电位势时，流函数$\psi(x, y)$的知识将给出任何一个导体上的电荷，利用第二节中的方程(4-49)，还能给出系统的电容量。

假如我们有一个二维导电系统，我们希望决定其单位长度导体的电容。设借助一个共形变换把z-平面上这些导体的截口映照到w-平面内，则我们能证明下述事实：

w-平面上两个映像导体间的电容量等于z-平面上原来两个导体间的电容量。

为了证明这个等式，考虑一对导体A和B，如图4.56(a)所示。它们的静电势分别是V_0和0。这些导体在共形映照下成为w-平面上的导体A'和B'。新导体A'，B'上的电位势分别被指定为V_0，0。在这两个平面上的复势是$\Phi(x,y)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$和$\Phi_1(u,v)=\varphi_1(u,v)+i\psi_1(u,v)$。

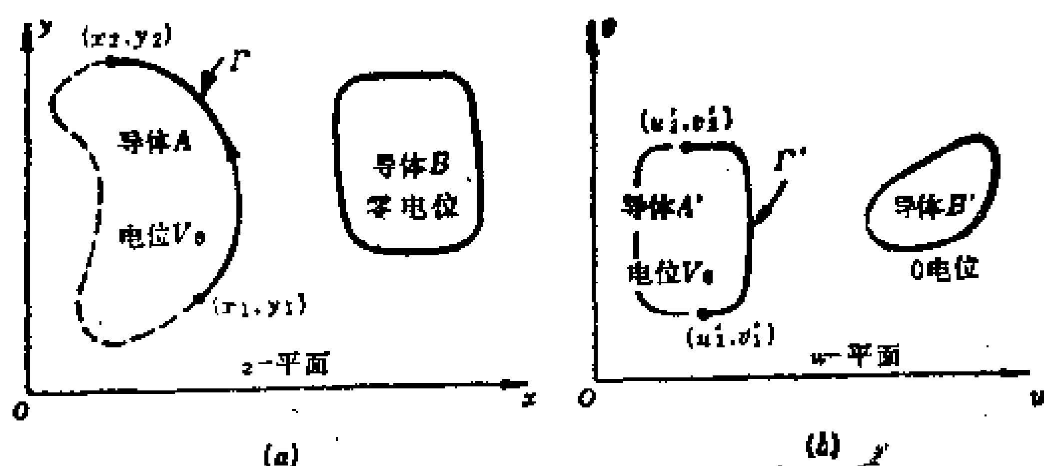


图 4.56

现在参考图4.56(a)，考虑沿导体A从(x_1,y_1)到(x_2,y_2)的曲线Γ。在w-平面上Γ的映像曲线是Γ'，它是沿导体A'从(u_1',v_1')到(u_2',v_2')的（见图4.56(b)）。当我们沿Γ移动时，ψ的改变量是$\psi(x_1,y_1)-\psi(x_2,y_2)$，而沿$\Gamma'$的对应的改变量是$\psi_1(u_1',v_1')-\psi_1(u_2',v_2')$。由于流函数$\psi(x,y)$及其变成的$\psi_1(u,v)$在两个平面的对应点取完全相同的值，因此，它们是相等的。又由于(x_1,y_1)和(x_2,y_2)是任意选取的，因此，绕A的边界环行一周后ψ的改变量必等于绕A'的边界环行一

周后 ψ_1 的改变量。于是，A 和 A' 上的电荷总量必定相同。另一方面，由于导体 A 与 B 间的电位势之差等于导体 A' 与 B' 间的电位势之差，且由于电容是电荷与电位势之差的比，所以，导体 A 和 B 之间的电容量与导体 A' 和 B' 之间的电容量是一样的。

第五章 整函数与亚纯函数

§1 无穷乘积及在流体管路传输中的应用

1.1 无穷乘积

设有复数序列$\{a_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$，考虑乘积

$$P_n=\prod_{k=1}^{n}a_k。$$

若因子$a_n(n=1,2,\cdots)$中有某一个为零，则显然

$$\lim_{n\to\infty}P_n=0。$$

以下我们假定$a_n\neq 0(n=1,2,\cdots)$。若$\lim\limits_{n\to\infty}P_n=p\neq 0$，$p$是有限数，则称无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}a_n \tag{5-1}$$

是收敛的，其值为p，记作$p=\prod\limits_{n=1}^{\infty}a_n$；若当$n\to\infty$时，$P_n$不趋于一有限极限，或者$p=0$，则称无穷乘积发散。

若无穷乘积(5-1)收敛，则P_n，P_{n-1}都趋于p且$p\neq 0$。因此，$P_n/P_{n-1}=a_n$趋于1。可见，无穷乘积(5-1)收敛的必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}a_n=1。\tag{5-2}$$

令$a_n=1-c_n$，$c_n\neq 1$，于是无穷乘积(5-1)便改写成

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-c_n)。\tag{5-3}$$

因而，无穷乘积(5-3)收敛的必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}c_n=0。\tag{5-4}$$

因为乘积的对数是各项的对数的和，这就有可能把讨论无穷乘积(5-1)的收敛性，化为讨论级数$\sum\log a_n$的收敛性，这里log是对数

的主值支。由于当 $n\to\infty$ 时，$a_n\to 1$，所以，我们可以假设对所有的 n，有 $\mathrm{Re}\, a_n>0$。因此，对一切 n，$\log a_n$ 是有定义的。

定理 1 设对一切 n 有 $\mathrm{Re}\, a_n>0$，则当且仅当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\log a_n$ 收敛时，无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛。

证明 设 $S_n=\log a_1+\log a_2+\cdots+\log a_n$，$P_n=a_1\cdot a_2\cdots a_n$。注意到对一切 n 我们有关系式

$$e^{S_n}=P_n。\tag{5-5}$$

若级数 $\sum\log a_n$ 收敛于 S，则 S_n 收敛于 S。于是，由关系式 (5-5)，P_n 收敛于 $e^S\neq 0$。故无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛。反之，若当 $n\to\infty$ 时，P_n 收敛于 p 且 $p\neq 0$，对关系式(5-5)取反函数，则我们有

$$S_n=\mathrm{Log}P_n=\log P_n+i2\pi k_n。\tag{5-6}$$

由于 $P_n\to p\neq 0$，所以 $S_n-S_{n-1}=\log a_n\to 0$，$\log P_n-\log P_{n-1}\to 0$。因而，当 $n\to\infty$ 时，$k_n-k_{n-1}\to 0$。由于每一个 k_n 都是整数，因此，存在一个 N 及 k，使得对于 $m,n\geqslant N$，有 $k_m=k_n=k$。因此，当 $n\to\infty$ 时，$S_n\to\log P+i2\pi k$。这说明级数 $\sum\log a_n$ 是收敛的。定理证毕。

定理 2 设对一切 n 有 $c_n\neq 1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\log(1-c_n)$ 绝对收敛，当且仅当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 绝对收敛。

证明 考虑 $\log(1-z)$在 $z=0$ 附近的幂级数展开式：

$$-\log(1-z)=\sum\frac{z^n}{n}=z+\frac{1}{2}z^2+\cdots+\frac{1}{n}z^n+\cdots,$$

它的收敛半径是1。如果 $|z|<1$，则

$$\left|1-\frac{\log(1-z)}{z}\right|=\left|\frac{1}{2}z+\frac{1}{3}z^2+\cdots\right|\leqslant\frac{1}{2}(|z|+|z|^2+\cdots)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{|z|}{1-|z|}。$$

如果我们进一步要求 $|z|<1/2$，则

$$\left|1-\frac{\log(1-z)}{z}\right|\leqslant\frac{1}{2}。$$

由此得到，对 $|z|<1/2$，有

$$\frac{1}{2}|z| \leqslant |\log(1-z)| \leqslant \frac{3}{2}|z|。 \tag{5-7}$$

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|$ 收敛，则 $|c_n|\to 0$，因此当 n 充分大时有 $|c_n|<1/2$。根据不等式 (5-7)，$\sum_{n=1}^{\infty}|\log(1-c_n)|$ 有一个收敛的优级数，因此它必收敛。反之，如果 $\sum_{n=1}^{\infty}|\log(1-c_n)|$ 收敛，则对充分大的 n 有 $|\log(1-c_n)|<1/4$。于是，当 n 充分大时，据不等式(5-7)有 $|c_n|<1/2$，且 $\sum|c_n|$ 有一个收敛的优级数，因此 $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|$ 收敛。定理证毕。

如果对所有的 n 有 $\operatorname{Re} a_n>0$，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\log a_n$ 是绝对收敛的，则称无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}a_n$ 是**绝对收敛的**。

根据定理 1 及级数的绝对收敛性可推出级数的收敛性，我们得到，乘积的绝对收敛性可推出乘积的收敛性。类似地，如果一个无穷乘积绝对收敛，则由这无穷乘积的各项重新排列而成的新的无穷乘积仍绝对收敛。由定理 1 和定理 2，我们便得到下述关于无穷乘积收敛性的基本判别法则。

定理 3 如果 $\operatorname{Re} a_n>0$，则当且仅当级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ 绝对收敛时，无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛。

我们现在应用这些结果于函数乘积的收敛性。我们考虑无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-h_n(z)), \tag{5-8}$$

其中 $h_n(z)$是某集 K 上的函数，且对一切的 $z\in K$，$h_n(z)\neq 1$，而且对一切的 $z\in K$ 和最多除掉有限个以外一切的 n 有

$$|h_n(z)|\leqslant|c_n|。$$

若 $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\log(1-h_n(z))$ 在 K 上一致绝对收敛。因此，无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1-h_n(z))$在 K 上一致地绝对收敛。

例 5-1 勃拉斯盖(Blaschke)乘积。设$\{a_n\}$是单位圆$\mathscr{D}$内的点列，

对一切 n 有 $a_n\neq 0$，并且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|) \tag{5-9}$$

收敛。证明无穷乘积

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-z}{1-\bar{a}_n z}\cdot\frac{|a_n|}{a_n} \tag{5-10}$$

关于 $|z|\leqslant r<1$ 一致收敛，且在单位圆内定义了一个解析函数，该解析函数恰以 $\{a_n\}$ 为其所有的零点。并证明 $|f(z)|\leqslant 1$。

证明 在圆域 $|z|\leqslant r<1$ 内，有

$$\left|1-\frac{|a_n|}{a_n}\frac{a_n-z}{1-\bar{a}_n z}\right|=\left|\frac{(a_n+|a_n|z)(1-|a_n|)}{a_n(1-\bar{a}_n z)}\right|\leqslant\frac{2(1-|a_n|)}{1-r}。$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)<\infty$，根据定理3，即得无穷乘积（5-10）在每个 $|z|\leqslant r<1$ 内一致收敛，因此，$f(z)$ 表示一个在 $|z|<1$ 内的解析函数。此外，每个 a_n 恰是 $f(z)$ 的零点，否则 $f(z)\neq 0$。最后，由于部分乘积的模小于1，显然，$|f(z)|\leqslant 1$。

关于无穷乘积的对数导数有下述有用的定理。

定理 4 设 $\{f_n\}$ 是开集 $\mathcal{O}$ 上的解析函数。假定 $f_n(z)$ 在 $\mathcal{O}$ 上一致地收敛于1。设 $f_n(z)=1+h_n(z)$，并且假定级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}h_n(z)$$

在 $\mathcal{O}$ 上一致地绝对收敛。则在 $\mathcal{O}$ 内无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ 一致地绝对收敛于某函数 $f(z)$；并且对 $\mathcal{O}$ 内任一不包含 $f_n(z)$ 的一切零点的紧子集 K，当 $z\in K$ 时，我们有

$$f'(z)/f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}f'_n(z)/f_n(z), \tag{5-11}$$

而且在 K 上收敛是一致的和绝对的。

证明 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}h_n(z)$ 在 $\mathcal{O}$ 内一致地绝对收敛，根据定理3，无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ 在 $\mathcal{O}$ 内一致地绝对收敛，记其极限函数为 $f(z)$，则 $f(z)=\prod\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ 是 $\mathcal{O}$ 内的解析函数，且 $f(z)\neq 0$，除非 $z\in\mathcal{O}$ 是某一个

$f_n(z)$的零点。所以对 $z\in K$，$f(z)\neq 0$。

由于 K 是紧集，根据覆盖定理，则 K 被有限多个半径为充分小的圆盘所覆盖。因此，我们能假定 K 是一个闭圆。由于 $\sum_{n=1}^{\infty} h_n(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 内一致地绝对收敛，所以，存在 N，使得当 $n\geqslant N$ 时 $\sum_{n=N}^{\infty}|h_n(z)|<1$。于是，若记

$$f(z)=\prod_{n=1}^{N-1} f_n(z) \prod_{n=N}^{\infty} f_n(z), \tag{5-12}$$

则级数

$$\sum_{n=N}^{\infty}\log f_n(z)=\sum_{n=N}^{\infty}\log(1+h_n(z))$$

在 K 上一致地绝对收敛于某个函数

$$\log G(z), \quad 其中\ G(z)=\prod_{n=N}^{\infty} f_n(z)\neq 0.$$

把它代入方程(5-12)，我们有

$$f(z)=\prod_{n=1}^{N-1} f_n(z)\cdot G(z)。$$

于是，我们有

$$f'(z)/f(z)=\sum_{n=1}^{N-1} f'_n(z)/f_n(z)+G'(z)/G(z)。$$

由于 $\sum_{n=N}^{\infty}\log f_n(z)$ 在 K 上一致地收敛于 $\log G(z)$，所以，对 $\log G(z)$ 可进行逐项求导，因此

$$G'(z)/G(z)=\sum_{n=N}^{\infty} f'_n(z)/f_n(z)。$$

故在 K 上方程式(5-11)是成立的，且收敛是一致的和绝对的。定理证毕。

1.2 魏尔斯特拉斯因子分解定理

设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是有相同零点的整函数。且每个零点的重数也相同。于是，$f(z)/g(z)$是个没有零点的整函数。我们首先分析这种情况。

定理 5 设 $f(z)$是非零的整函数。则存在一个整函数 $h(z)$，使得

$$f(z)=e^{h(z)}。 \tag{5-13}$$

证明 设C是一闭围道，由于$f(z)$非零，则有

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0。$$

因此，对平面上固定的一点z_0，函数

$$h(z) = \log f(z_0) + \int_{z_0}^{z} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta$$

是有定义的，这是因为积分与路径无关，而且也是解析的。在任何一点的邻域内，这函数是由$\log f(z)$确定的。因此

$$e^{h(z)} = f(z)$$

正是我们所要证明的。

我们看到，如果$f(z)$，$g(z)$是两个有相同零点和相同重数的整函数，则对某个整函数$h(z)$，有

$$f(z) = g(z)e^{h(z)}。\tag{5-14}$$

反之，若$h(z)$是整函数，则$g(z)e^{h(z)}$与$g(z)$有相同的零点（按重数计算）。

下面，我们将对具有事先给定的零点的函数给一个标准的形式。假定我们规定这些零点是按其绝对值增加而排列的，于是设$z_1, z_2, \cdots$是非零的复数序列，满足

$$|z_1| \leqslant |z_2| \leqslant \cdots。$$

假定当$n \to \infty$时，$|z_n| \to \infty$。如果我们试图确定由无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$$

所确定的函数，但我们认识到这乘积可能不收敛，因而，我们必须插入收敛因子。而且，插入的这个因子不能引进新零点，为此，我们使它是个指数函数。我们要它尽可能的简单，因此，我们使它是多项式的指数，它的阶将依赖于z_n的序列。于是，我们考虑下述形式的因子

$$E(z, n) = (1 - z)e^{z + z^2/2 + \cdots + z^n/n}。$$

指数中的多项式确实是使log的级数中取消前n项，因此

$$\log E(z, n) = \log(1 - z) + z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n}$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{-z^k}{k}。 \tag{5-15}$$

定理 6 若 $|z| \leqslant 1/2$，则

$$|\log E(z,n)| \leqslant 2|z|^{n+1}。$$

证明 因 $|z| \leqslant 1/2$，由方程式(5-15)，即得

$$|\log E(z,n)| \leqslant \frac{|z|^{n+1}}{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \leqslant 2|z|^{n+1}。$$

给定序列$\{z_n\}$，我们可选取整数 k_n 使得级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{|z_n|}\right)^{k_n}$$

对一切正实数 R 收敛。当 $|z_n| \to \infty$ 时，我们能找到这种 k_n。令

$$P_n(z) = z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^{k_n-1}}{k_n - 1}, \tag{5-16}$$

和

$$E_n(z) = \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{P_n(z/z_n)}。 \tag{5-17}$$

并注意到

$$P_n\left(\frac{z}{z_n}\right) = \frac{z}{z_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{k_n - 1}\left(\frac{z}{z_n}\right)^{k_n - 1}。$$

则我们有下述定理。

定理 7 乘积

$$g(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_n(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{P_n(z/z_n)} \tag{5-18}$$

在每个圆 $|z| \leqslant R$ 上一致地绝对收敛，且定义了一个整函数，它以序列$\{z_n\}$的点为零点，此外没有其它零点。

证明 固定 R，由于 $|z_n| \to \infty$，则存在 N，使得

$$|z_N| \leqslant 2R < |z_{N+1}|。$$

对 $|z| \leqslant R$ 和 $n > N$，我们有

$$\left|\frac{z}{z_n}\right| < \frac{1}{2},$$

因此，据定理 6，有

$$|\log E_n(z)| \leqslant 2\left(\frac{R}{|z_n|}\right)^{k_n+1} < \left(\frac{R}{|z_n|}\right)^{k_n}。$$

于是，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log E_n(z)$$

当 $|z| \leqslant R$ 时一致地绝对收敛，从而，含有指数化乘积的一致的绝对收敛性。

显然，极限函数有零点序列 $\{z_n\}$，其重数等于 z_n 在序列中出现的次数。我们仍有必要证明，极限函数没有其它的零点。我们固定某 R 且仅考虑 $|z| \leqslant R$。给定 $\varepsilon > 0$，则存在 N_0，使得当 $N > N_0$ 时，由前面所证的 log 序列的绝对一致收敛性

$$\left|\log \prod_{n=N_0}^{N} E_n(z)\right| \leqslant \left|\sum_{n=N_0}^{\infty} \log E_n(z)\right| < \varepsilon$$

可知，乘积

$$\prod_{N_0}^{N} E_n(z)$$

是接近 1 的。但是

$$f(z) = \prod_{n=1}^{N_0-1} \lim_{N\to\infty} \prod_{N_0}^{N} E_n(z)。$$

上式右边第一个因子在圆 $|z| \leqslant R$ 上恰有零点 $z_1, z_2, \cdots, z_{N_0-1}$。右边第二个乘积的极限是接近 1 的，因此没有零点。故无穷乘积(5-18)恰以序列 $\{z_n\}$ 为零点。定理证毕。

定理 8 等式

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E'_n(z)}{E_n(z)} \tag{5-19}$$

在 $z \neq z_n$ 时成立，且在不包含一切 z_n 的紧集上一致成立。

由定理 4 的（5-11）式即得我们所要求的结论，因为无穷乘积(5-18)在每个闭圆 $|z| \leqslant R$ 上一致地收敛。

定理 9 任何亚纯函数可以表示成两个整函数之比。

证明 事实上，设 $f(z)$ 是任一亚纯函数，由定理 7，存在整函数 $f_1(z)$，它以 $f(z)$ 的极点为它的零点。令

$$f_2(z)=f(z)f_1(z),$$

只要规定在 $f(z)$ 的极点 a 处 $f_2(a)=\lim\limits_{z\to a}f_2(z)$，则 $f_2(z)$ 就是一个整函数。所以 $f(z)=f_2(z)/f_1(z)$。

定理 10（魏尔斯特拉斯因子分解定理） 若函数 $f(z)$ 是整函数，零点是

$$\overbrace{0,0,\cdots,0}^{m\text{个}},z_1,z_2,\cdots,z_n,\cdots$$

$$0<|z_1|\leqslant|z_2|\leqslant\cdots\leqslant|z_n|\leqslant\cdots,\quad \lim_{n\to\infty}|z_n|=+\infty,$$

则 $f(z)$ 可表示成

$$f(z)=z^m e^{h(z)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)e^{\frac{z}{z_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{k_n-1}\left(\frac{z}{z_n}\right)^{k_n-1}},\tag{5-20}$$

其中 $h(z)$ 是一整函数。

证明 由定理 7，存在一整函数 $g(z)$，它恰以 $\{z_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$ 为其零点。设

$$H(z)=\frac{f(z)}{z^m g(z)}。$$

因为 $g(z)$ 和 $f(z)$ 有相同的零点，且同级，所以 z_n 是 $H(z)$ 的可去奇点。又因为 $H(z)$ 是一个整函数，且没有零点，则据定理 5，$H(z)=e^{h(z)}$，这里 $h(z)$ 是整函数，因此得到

$$\begin{aligned}f(z)&=z^m e^{h(z)}g(z)\\&=z^m e^{h(z)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\\&\quad\times e^{\frac{z}{z_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{k_n-1}\left(\frac{z}{z_n}\right)^{k_n-1}}。\end{aligned}$$

例 5-2 证明：

$$\sin\pi z=\pi z\prod_{n\neq 0}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{z/n},\tag{5-21}$$

$$\pi\operatorname{ctg}\pi z=\frac{\cos\pi z}{\sin\pi z}=\frac{1}{z}+\sum_{n\neq 0}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)。\tag{5-22}$$

证明 我们令 $z_n=n$，这里 n 为非零的整数（可能是负的）。令 $k_n=2$，则 $k_n-1=1$，级

$$\sum_{n=1}^{\infty}(R/n)^2$$

对一切 R 收敛。因此，据定理 7，函数

$$f(z)=\pi z\prod_{n\neq 0}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{z/n}$$

是个整函数，在整数处有一阶零点，我们断言它等于 $\sin\pi z$。由于魏尔斯特拉斯因子分解定理有如定理 4 中所述的性质，因此，取对数导数和逐项求导，即得

$$f'(z)/f(z)=\frac{1}{z}+\sum_{n\neq 0}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right) \tag{5-23}$$

在每个不包含整数的紧集上收敛是一致的。函数 $g(z)=f'(z)/f(z)$ 在每个整数处有一阶极点。我们断言 $g(z)$ 是周期函数，且周期为 1。考虑函数

$$g(z+1)-g(z),$$

并取其导数。其导数是 0，因为 $g(z+1)$ 和 $g(z)$ 的导数均为

$$-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^2}。$$

因此，$g(z+1)-g(z)$ 是常数。但是，在上面的差式中，项 $1/z$ 已经消去了，并且 $g(z+1)-g(z)$ 在点 0 是有定义的，其值为 0。因此，这常数是 0，故 $g(z)$ 是周期的，如所断言的。

由于 $f(z)$ 和 $\sin\pi z$ 确有相同的零点，则存在函数 $\varphi(z)$，使得

$$f(z)=e^{\varphi(z)}\sin\pi z。 \tag{5-21}$$

两边取对数导数，产生

$$f'(z)/f(z)=\varphi'(z)+\pi\operatorname{ctg}\pi z, \tag{5-22}$$

其中

$$\operatorname{ctg}\pi z=\frac{\cos\pi z}{\sin\pi z}=i\frac{e^{i\pi z}+e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}}。$$

我们要证明：$\operatorname{ctg}\pi z$ 在复数 $z=x+iy$ 的条形 $0\leqslant x\leqslant 1$，$-\infty<y<+\infty$ 中当 $y\to\infty$ 时是一致有界的。事实上，在下述区域

$$\{|y|<1,0<x<1\}\backslash\{|z|<\varepsilon\}\cup\{|z-1|<\varepsilon\}$$

内，$\operatorname{ctg}\pi z$ 是有界的。在上述条形的其余地方，注意到

$$|\operatorname{ctg}\pi z|=\left|\frac{e^{i\pi x}e^{-\pi y}+e^{-i\pi x}e^{\pi y}}{e^{i\pi x}e^{-\pi y}-e^{-i\pi x}e^{\pi y}}\right|\leqslant\frac{e^{-\pi y}+e^{\pi y}}{|e^{-\pi y}-e^{\pi y}|}.$$

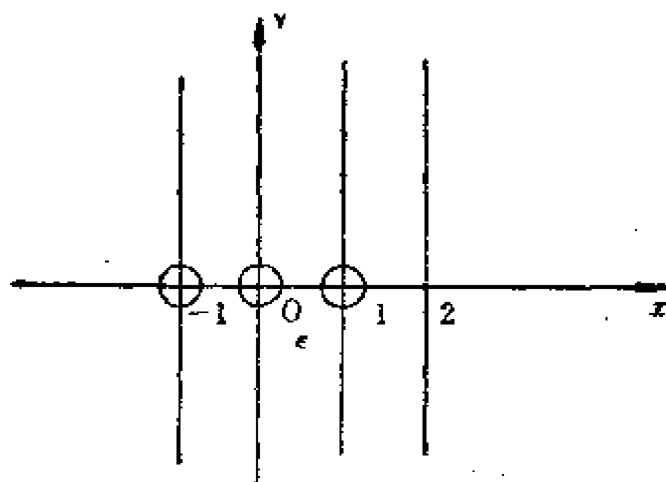


图 5.1

若 $y\geqslant 1$，则

$$|\operatorname{ctg}\pi z|\leqslant\frac{1+e^{-2y}}{1-e^{-2y}}\leqslant\frac{1+e^{-2}}{1-e^{-2}};$$

若 $y\leqslant -1$，则

$$|\operatorname{ctg}\pi z|\leqslant\frac{1+e^{2y}}{1-e^{2y}}\leqslant\frac{1+e^{-2}}{1-e^{-2}}。$$

故 $\operatorname{ctg}\pi z$ 在除去 $|z|<\varepsilon$ 和 $|z-1|<\varepsilon$ 的闭条形上（图 5.1）是一致有界的。由于 $\operatorname{ctg}\pi z$ 是周期为 1 的周期函数，所以，$\operatorname{ctg}\pi z$ 在除去并集 $\bigcup\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\{|z-n|<\varepsilon\}$ 的复平面上是一致有界的。同样的结果对 $f'(z)/f(z)$ 来说也是对的。事实上，由于

$$|f'(z)/f(z)|^2\leqslant\frac{1}{|z|^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{|z-n|^2}+\frac{1}{|z+n|^2}\right), \qquad (5\text{-}24)$$

将第一个级数分裂成

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{|x+iy-n|^2}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{|x+iy-n|^2},$$

我们首先取 N 足够大，使得第二个和式是小的，然后，取 y 足够大，使得第一个和式是小的。因此，(5-24) 式右边的第一个级数当 $y\to\infty$ 时是一致有界的。同理，(5-24)式右边的第二个级数也具有同样的性

质。因而

$$f'(z)/f(z)-\pi\operatorname{ctg}\pi z=\varphi'(z)$$

是一个亚纯函数，它是周期的。由于 $f'(z)/f(z)$ 与 $\pi\operatorname{ctg}\pi z$ 在原点有相同的主要部分 $\frac{1}{z}$，所以，$f'(z)/f(z)-\pi\operatorname{ctg}\pi z$ 在原点是解析的。又因为它是周期为 1 的周期函数，因此，它在所有的 $z=n$ 处都是解析的。于是，$\varphi'(z)$ 是个整函数，而且根据所证，它是个有界的整函数。根据柳微尔定理，$\varphi'(z)$必定是常数。令 $z=0$，容易检验 $\varphi'(0)=0$。因此，$\varphi(z)$是常数。这样，我们得到

$$f(z)=C\sin\pi z, \tag{5-23'}$$

其中 C 是某个常数。我们将上式两边除以 πz，并令 $z\to0$，即得 $C=1$，这正是我们所要求的。把它代入(5-23′)式，即得(5-21)式。

1.3 阿达玛定理

当魏尔斯特拉斯因子分解定理中的一切整数取成相等时，找一个简单的判据是有用的。令 ρ 是个正实数。若对给定的 $\varepsilon>0$，存在常数 C（依赖于 ε），使得对一切充分大的 R，有

$$\|f\|_R\leqslant C^{R^{\rho+\varepsilon}}, \tag{5-25}$$

或等价于对 $R\to\infty$，有

$$\log\|f\|_R\ll R^{\rho+\varepsilon}, \tag{5-26}$$

其中 $\|f\|_R=\max\limits_{|z|=R}|f(z)|$，"$|A|\ll B$" 表示存在常数 C，对充分大的 R 有 $|A|\leqslant CB$，即 $|A|$ 的大小当 R 充分大时与 B 同阶。则我们称整函数 $f(z)$的阶 $\leqslant\rho$。若对一切充分大的 R，有

$$\|f\|_R\leqslant C^{R^{\rho}}, \tag{5-27}$$

则称 $f(z)$的**严格阶**$\leqslant\rho$。若 ρ 是使不等式(5-27) 成立的那些正数的最大下界，类似于精确的严格价的定义，则称函数 $f(z)$是 ρ **阶的**。

例如，函数 e^z 有严格阶为 1，因为 $|e^z|=e^x\leqslant e^{|z|}$。

定理 11 设 $f(z)$是严格阶$\leqslant\rho$ 的整函数。设 $\nu_f(R)$是 $f(z)$在半径为 R 的圆内零点的个数，则

$$\nu_f(R) \ll R^{\rho}。\tag{5-28}$$

证明 我们不失一般性地能假设，$f(z)$在原点不为零，否则，必要的话，除以z^m，m是某正整数。由琴生不等式（见第二章§1的习题23），我们获得

$$\int_R^{2R} \frac{\nu_f(x)}{x} dx \leqslant \int_0^{2R} \frac{\nu_f(x)}{x} dx \leqslant \log \|f\|_R - \log f(0) \leqslant R^{\rho}。\tag{5-29}$$

但是，在区间$[R, 2R]$上，我们有$\nu_f(x) \geqslant \nu_f(R)$，因此

$$(5\text{-}29)\text{ 式的左边} \geqslant \nu_f(R) \int_R^{2R} \frac{1}{x} dx = \nu_f(R) \log 2,$$

这就证明了定理。

定理 12 设$f(z)$有严格阶$\leqslant \rho$，又设$\{z_n\}$是$f(z)$的非零的零点序列，按重数计算，且按绝对值的增加性排列，则对每个$\delta > 0$，级数

$$\sum \frac{1}{|z_n|^{\rho+\delta}}\tag{5-30}$$

收敛。

证明 我们取部分和

$$\sum_{|z_n|<R} \frac{1}{|z_n|^{\rho+\delta}} \ll \sum_{r=1}^{R} \frac{\nu(r+1)-\nu(z)}{r^{\rho+\delta}}$$

$$\ll \frac{\nu(R)}{R^{\rho+\delta}} + \sum_{r=1}^{R} \frac{\nu(r)}{r^{\rho+\delta+1}} + \text{常数},$$

每个商$\nu(r)/r^{\rho}$是有界的，因而第一项是有界的，而且和式是有界的，其界为$C\sum 1/r^{1+\delta}$，这级数是收敛的。定理证毕。

令$\rho > 0$，设k'是大于ρ的最小整数，又设$k = k' - 1$。设$\{z_n\}$是复数序列，$z_n \neq 0$，它们是按绝对值的增加而排列的，并且使得对每个$\varepsilon > 0$，级数

$$\sum \frac{1}{|z_n|^{\rho+\varepsilon}}\tag{5-31}$$

收敛。令

$$P^{(k)}(z) = P(z) = z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^k}{k},\tag{5-32}$$

我们称

$$E^{(k)}(z,z_n)=E(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)e^{P(z/z_n)}=\prod_{n=1}^{\infty}E\left(\frac{z}{z_n},k\right) \quad (5\text{-}33)$$

为由序列$\{z_n\}$和数ρ所决定的**典型乘积**，或简称为**典型乘积**。§2中的估计证明，它定义了一个整函数。

定理 13 上述典型乘积(5-33)是阶$\leqslant\rho$的整函数。

证明 设$\rho\leqslant\lambda\leqslant k+1$，存在常数$C$，使得

$$|E(z,k)|\leqslant C^{|z|^\lambda}。\quad (5\text{-}34)$$

由定理6，若$|z|\leqslant 1/2$，这是正确的，对$|z|\geqslant 1$和$1/2\leqslant|z|\leqslant 1$，显然，不等式(5-34)也是正确的。对于小的$\varepsilon$，我们取$\lambda=\rho+\varepsilon$，则

$$|E(z)|\leqslant\prod C^{|z/z_n|^\lambda}\leqslant C^{|z|^\lambda\Sigma(1/|z_n|^\lambda)}$$

于是证明了定理。

定理 14（最小模定理） 设$f(z)$是阶$\leqslant\rho$的整函数。设$z_1,z_2,\cdots$是f的零点序列，并按它们的重数计算。又设$s>\rho$。对$|z_n|>1$，令$U=\{z\in\mathscr{C}:\ |z-z_n|>1/|z_n|^s$，则存在$r_0(\varepsilon,f)$，使得对$z\in U$，$|z|=r>r_0(\varepsilon,f)$，我们有

$$|f(z)|>e^{-r^{\rho+\varepsilon}},\quad 即\ \log|f(z)|>-r^{\rho+\varepsilon}。\quad (5\text{-}35)$$

证明 首先对典型乘积$E(z)$证明最小模定理。设$|z|=r$，我们有

$$E(z)=\prod_{|z_n|<2r}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\prod_{|z_n|<2r}e^{P(z/z_n)}\prod_{|z_n|>2r}E\left(\frac{z}{z_n},k\right)。$$

于是

$$\log|E(z)|\geqslant\sum_{|z_n|<2r}\log\left|1-\frac{z}{z_n}\right|-\sum_{|z_n|<2r}\left|P\left(\frac{z}{z_n}\right)\right|$$
$$-\sum_{|z_n|>2r}\log\left|E\left(\frac{z}{z_n},k\right)\right|。\quad (5\text{-}36)$$

由于存在常数C使得$|E(z,k)|\leqslant C^{|z|^{\rho+\varepsilon}}$，所以，由定理12，有

$$-\sum_{|z_n|>2r}\log\left|E\left(\frac{z}{z_n},k\right)\right|$$
$$\geqslant -r^{\rho+\varepsilon}\left(\sum\frac{1}{|z_n|^{\rho+\varepsilon}}\right)\log C>-C'r^{\rho+\varepsilon},\quad (5\text{-}37)$$

$$\sum_{|z_n|<2r}\left|P\left(\frac{z}{z_n}\right)\right|\leqslant\sum_{|z_n|<2r}\left|\frac{z}{z_n}\right|^k\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}\left|\frac{z_n}{z}\right|+\cdots+\left|\frac{z_n}{z}\right|^{k-1}\right)$$

$$\leqslant C''\sum_{|z_n|<2r}\left|\frac{z}{z_n}\right|^k, \tag{5-38}$$

因为$|z_n/z|<2$，其中C'和C''是常数。另外，我们有

$$\sum_{|z_n|<2r}\left|\frac{z}{z_n}\right|^k\leqslant r^k\sum_{m<2r}\frac{\nu(m+1)-\nu(m)}{m^k}$$

$$\ll r^k\left[\frac{\nu(2r)}{r^k}+\sum_{m\leqslant 2r}\frac{\nu(m)}{m^{k+1}}+\text{常数}\right]$$

$$\ll r^{\rho+\varepsilon}\ (\text{根据定理11}), \tag{5-39}$$

在(5-36)的第一个和式中，我们有

$$\left|1-\frac{z}{z_n}\right|=\frac{|z-z_n|}{|z_n|}\geqslant\frac{1}{|z_n|^{s+1}}\geqslant\frac{1}{(2r)^{s+1}}。$$

因此，由定理11，第一个和式满足下界

$$\sum_{|z_n|<2r}\log\left|1-\frac{z}{z_n}\right|\geqslant\nu(2r)\log(2r)^{-s-1}$$

$$\geqslant -C'''r^{\rho+\varepsilon}\log(2r)。 \tag{5-40}$$

把(5-37)—(5-40)式代入(5-36)式，即能证得不等式(5-35)式。

定理证明的其余部分，将在阿达玛定理之后再证明。

定理 15 (阿达玛(Hadamard)定理) 设$f(z)$是ρ阶整函数。设$\{z_n\}$是其非零之零点的序列，令$k+1$是大于ρ的最小整数，并设$P=P^{(k)}$，则

$$f(z)=e^{h(z)}z^m\prod\left(1-\frac{z}{z_n}\right)e^{P(z/z_n)}, \tag{5-41}$$

其中m是$f(z)$在原点的零点的阶，$h(z)$是次数$\leqslant\rho$的多项式。

证明 对$s>\rho$，据定理12，级数$\sum 1/|z_n|^s$收敛。因此，对每个充分大的r，存在R，$r\leqslant R\leqslant 2r$，使得对一切n，半径为R的圆周不与中心在z_n、半径为$1/|z_n|^s$的圆相交。由于

$$\log\|f/z^mE(z)\|_R\leqslant\log\|f\|_R+\log\|1/E\|_R+m\log R,$$

根据对典型乘积的最小模定理，则$g(z)=f(z)/z^mE(z)$是整函数，且

其阶$\leqslant\rho$。又由于$g(z)$是不等于零的整函数，根据定理5，则存在整函数$h(z)$使得$g(z)=e^{h(z)}$。下面我们证明，$h(z)$是次数$\leqslant\rho$的多项式。

由于$g(z)$的阶$\leqslant\rho$，所以，存在常数$C\geqslant1$，使得对一切充分大的R，我们有

$$\sup_{|z|=R}\operatorname{Re}h(z)\leqslant CR^{\rho}。\tag{5-42}$$

在鲍雷尔-卡拉太屋独利定理中，取$R=2r$，则$\|h\|_r\ll r^{\rho}(r\to\infty)$。令$h(z)=\sum a_nz^n$，由柯西公式，对一切$R$,我们有$|a_n|\leqslant\|h\|_R/R^n$。于是，若$n>\rho$，则有$a_n=0$。故$h(z)$是次数不超过$\rho$的多项式。定理证毕。

现在，我们再来证明一般情况下的最小模定理。这是显然的，因为指数项$e^{h(z)}$明显地满足所要求的下界。

下面两个定理是阿达玛定理的应用。第一个是譬嘎(Picard)定理的一个特殊情形。

定理16 若函数$f(z)$是有限阶整函数，则$f(z)$取到每一个有限复数，至多可能除一个例外值。

证明 用反证法。假设有两个不同的复数α,β，对一切有限复数z，$f(z)\neq\alpha$，$f(z)\neq\beta$，则$f(z)-\alpha$也是有限阶整函数，且$f(z)-\alpha\neq0$。因此，$f(z)-\alpha=e^{h(z)}$，$h(z)$是整函数。由阿达玛定理，$h(z)$是一个多项式，其次数不超过$f(z)$的级。但是，$e^{h(z)}$不取$\beta-\alpha$，即$h(z)$不取$\log(\beta-\alpha)$，这与代数基本定理相矛盾，因为多项式取到每一个有限值。定理证毕。

定理17 非整数级的有限阶整函数必有无穷多个零点。

证明 若不然，则整函数的零点只有有限多个，比如为$z_1,z_2,\cdots,z_n$。由阿达玛定理，$f(z)=e^{h(z)}(z-z_1)\cdots(z-z_n)$，$h(z)$是一个多项式，它的次数$m$不超过$f(z)$的阶$\rho$，$m\leqslant\rho$，$e^{h(z)}$的阶是$m$（见习题5）。但是，$f(z)$与$e^{h(z)}$应有相同的阶，所以$m=\rho$。而$\rho$又是非整数，这就有了矛盾。故定理的结论是正确的。定理证毕。

1.4 无穷乘积在流体管路传输中的应用

在研究流体线路中的传输特性时，需要讨论传递函数，而这种传

递函数的分子和分母中仅包含

$$F(z)=\mathrm{ch}z+B(z)\cdot\mathrm{sh}z \tag{5-43}$$

这种类型的函数，$z=\beta s$，β 是常数。在流体线路中，$F(z)$这种函数是很典型的，只不过 B 可能是 z 的函数。

为了将工程问题简化到容易处理的地步，通常把函数展开成幂级数，并保留其低阶项。但是，这种方法对我们处理流体管路传输问题来说却将是失败的。

将 $F(z)$展开成幂级数，由 $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n$，得

$$\mathrm{ch}z=\frac{1}{2}(e^z+e^{-z})=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

$$\mathrm{sh}z=\frac{1}{2}(e^z-e^{-z})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}。$$

于是，当 B 是常数时，我们有

$$F(z)=1+Bz+\frac{z^2}{2!}+\frac{B}{3!}z^3+\frac{z^4}{4!}+\frac{B}{5!}z^5+\cdots, \tag{5-44}$$

我们取其前六项作为其渐近式，则

$$F_6(z)=1+Bz+\frac{z^2}{2!}+\frac{B}{3!}z^3+\frac{z^4}{4!}+\frac{B}{5!}z^5。$$

我们知道(参看第三章 §3 中的例 3-14)，$F_6(z)$在右半平面 $\mathrm{Re}z>0$ 上至少有一个零点，而且，即使保留更多的项，$F_n(z)$ $(n>5)$也至少有一个零点位于右半平面上，因此，这个系统是不稳定的。但是，在实际上，这个系统是稳定的，这说明幂级数方法是失效的。为什么会产生这种现象呢？这是因为虽然 $F_n(z)$ 在复平面上内闭地收敛于 $F(z)$，甚至如第三章 §1 中定理 7 的推论 1 所说，若极限函数 $F(z)$不恒等于零，则 $F(z)$的每个零点是函数 $F_n(z)$ 的零点的极限。所以，一般来说，$F_n(z)$的零点不是 $F(z)$的零点。因此，即使 $F(z)$的零点全位于左半平面，系统是稳定的，但是，$F_n(z)$的有的零点完全有可能位于右半平面内，系统是不稳定的，故不能用 $F_n(z)$作为 $F(z)$的近似。若以 $F_1(z)$或 $F_2(z)$作为渐近式，虽然不会产生不稳定性，但这样的渐近式

对通常的工程项目来说是太粗糙了。所以解决问题的关键在于将$F(z)$展开成无穷乘积。

我们将$F(z)=\text{ch}z+B\text{sh}z$展开成无穷乘积。

由于$\text{ch}z=\frac{1}{2}(e^z+e^{-z})$，$\text{sh}z=\frac{1}{2}(e^z-e^{-z})$，则

$$F(z)=\frac{1}{2}[e^z+e^{-z}+B(e^z-e^{-z})]=0。\tag{5-45}$$

它等价于

$$e^z(1+B)-e^{-z}(B-1)=0,$$

或者

$$e^{2z}=\frac{B-1}{B+1}。$$

于是，$F(z)=0$的解为

$$\begin{aligned}z&=\frac{1}{2}\,\text{Log}\,\frac{B-1}{B+1}\\&=\frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{B-1}{B+1}\right|+i\text{Arg}\left(\frac{B-1}{B+1}\right)\right]。\end{aligned}\tag{5-46}$$

令$z=x+iy$，则$F(z)=0$的零点为

$$x=\frac{1}{2}\log\left|\frac{B-1}{B+1}\right|<0,\qquad y=\frac{1}{2}\,\text{Arg}\left(\frac{B-1}{B+1}\right)。\tag{5-47}$$

我们知道，$\text{Arg}(\cdot)$是多值函数，它有无限多个值：

$$\text{Arg}\left(\frac{B-1}{B+1}\right)=\arg\left(\frac{B-1}{B+1}\right)+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)。$$

若$B>1$，则$\arg\left(\frac{B-1}{B+1}\right)=0$，于是

$$y=\frac{1}{2}\,\text{Arg}\left(\frac{B-1}{B+1}\right)=\pm2n\pi/2=\pm n\pi,$$

即
$$y=\pm n\pi\qquad(n=0,1,2,\cdots)。$$

若$0\leqslant B<1$，则$\arg\left(\frac{B-1}{B+1}\right)=\pi$，于是

$$y=\frac{1}{2}(\pi\pm 2n\pi)=\pm\frac{1}{2}(2n+1)\pi \quad (n=0,1,2,\cdots)。$$

综上所述，$F(z)$的零点为

$$\begin{cases} z=\frac{1}{2}\log\left|\frac{B-1}{B+1}\right|\pm in\pi \quad (n=0,1,2,\cdots) \quad (B>1), \\ z=\frac{1}{2}\log\left|\frac{B-1}{B+1}\right|\pm i\frac{2n+1}{2}\pi \quad (n=0,1,2,\cdots) \quad (0\leqslant B<1)。 \end{cases} \tag{5-48}$$

它们都位于左半复平面$\mathrm{Re}z<0$上，因

$$X_B=\frac{1}{2}\log\left|\frac{B-1}{B+1}\right|<0,$$

注意到

$$F(z)=\frac{1}{2}[(B+1)e^z-(B-1)e^{-z}],$$

对任何$|z|=R$，显然有

$$\|F\|_R\ll e^R。$$

可见，$F(z)$是1阶整函数，因此，据阿达玛定理，我们有

$$F(z)=e^{h(z)}\prod_{n=-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)e^{z/z_n}, \tag{5-49}$$

其中$h(z)$的阶$\leqslant 1$，所以，$h(z)=a+bz$。在(5-49)式中令$z=0$，则得$e^{h(0)}=F(0)=1$。于是，我们有$h(0)=0$，即$a=0$。为了确定$b=h'(0)$，对(5-49)式两边取对数导数，据定理4中的方程(5-11)，我们有

$$\frac{F'(z)}{F(z)}=h'(z)-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{z}{z_n^2\left(1-\frac{z}{z_n}\right)}。$$

于是，我们有$h'(0)=\lim\limits_{z\to 0}F'(z)/F(z)$。

但是

$$\lim_{z\to 0}\frac{F'(z)}{F(z)}=\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{sh}z+B\mathrm{ch}z}{\mathrm{ch}z+B\mathrm{sh}z}=B。$$

从而，$b=h'(0)=B$，因此，$h(z)=Bz$。于是，我们有

若$B>1$，则

$$F(z)=e^{Bz}\left(1-\frac{z}{X_B}\right)e^{\frac{z}{X_B}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\left(1-\frac{z}{\bar{z}_n}\right)e^{\frac{z}{z_n}+\frac{z}{\bar{z}_n}}$$

$$=\left(1-\frac{z}{X_B}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2X_Bz-z^2}{X_B^2+n^2\pi^2}\right)\exp\cdot\left\{z\left[B+\frac{1}{X_B}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2X_B}{X_B^2+n^2\pi^2}\right]\right\}, \tag{5-50}$$

若$0\leqslant B<1$，则

$$F(z)=e^{Bz}\prod_{n=0}^{\infty}\left[1-\frac{z}{X_B+\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi i}\right]\left[1-\frac{z}{X_B-\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi i}\right]e^{\frac{z}{z_n}+\frac{z}{\bar{z}_n}}$$

$$=\prod_{n=0}^{\infty}\left[1-\frac{2X_Bz-z^2}{X_B^2+\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\pi^2}\right]e^{z\left[B+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2X_B}{X_B^2+\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\pi^2}\right]}。 \tag{5-51}$$

但是，实际上

$$B+\frac{1}{X_B}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2X_B}{X_B^2+n^2\pi^2}=0\quad(B>1), \tag{5-52}$$

$$B+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2X_B}{X_B^2+\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\pi^2}=0\quad(0\leqslant B<1)。 \tag{5-53}$$

事实上，由(5-21)，我们知道

$$\sin z=z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right), \tag{5-54}$$

而 $\mathrm{sh}z=-i\sin iz$ 因此，我们有

$$\mathrm{sh}z=z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)。 \tag{5-55}$$

由于，$\cos z=\sin 2z/2\sin z$，所以

$$\cos z=\frac{2z\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4z^2}{n^2\pi^2}\right)}{2z\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)}$$

$$=\frac{\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{4z^2}{(2m)^2\pi^2}\right)\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{4z^2}{(2m-1)^2\pi^2}\right)}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)}$$

$$=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4z^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right)。\tag{5-56}$$

而 $\mathrm{ch}z=\cos iz$，于是，我们有

$$\mathrm{ch}z=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{4z^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right)。\tag{5-57}$$

对方程(5-55)的两边求对数导数，由方程(5-11)，则得

$$\frac{\mathrm{ch}z}{\mathrm{sh}z}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{n^2\pi^2+z^2}。$$

在上述方程式中，令 $z=X_B$，$X_B=\frac{1}{2}\log\left(\frac{B-1}{B+1}\right)$，我们得到

$$\frac{1}{X_B}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2X_B}{X_B^2+n^2\pi^2}=\frac{\mathrm{ch}X_B}{\mathrm{sh}X_B}=\frac{e^{2X_B}+1}{e^{2X_B}-1}$$

$$=\frac{\frac{B-1}{B+1}+1}{\frac{B-1}{B+1}-1}=-B。$$

这说明方程(5-52)是成立的。

类似地，对方程

$$\mathrm{ch}z=\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{z^2}{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\pi^2}\right]$$

的两边取对数导数，由定理 4 的方程(5-11)，有

$$\frac{\mathrm{sh}z}{\mathrm{ch}z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2z}{z^2+\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\pi^2}。$$

令 $z=X_B$，$X_B=\frac{1}{2}\log\frac{1-B}{1+B}$，我们有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2X_B}{X_B^2+\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\pi^2}=\frac{\mathrm{sh}X_B}{\mathrm{ch}X_B}=\frac{e^{2X_B}-1}{e^{2X_B}+1}=-B.$$

故方程(5-53)是成立的。

于是，我们获得

$$F(z)=\left(1-\frac{z}{X_B}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{2X_Bz-z^2}{X_B^2+n^2\pi^2}\right]\quad(B>1),\tag{5-58}$$

$$F(z)=\prod_{n=0}^{\infty}\left[1-\frac{2X_Bz-z^2}{X_B^2+\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\pi^2}\right]\quad(0\leqslant B<1).\tag{5-59}$$

现在，我们用无穷乘积来研究传递函数。

若 $B=K_0Z_0>1$，则 $\frac{1}{B}=B'<1$。于是，传递函数

$$G(s)=\frac{\mathrm{ch}z+B\mathrm{sh}z}{\mathrm{ch}z+\frac{1}{B}\mathrm{sh}z}=\frac{\mathrm{ch}z+B\mathrm{sh}z}{\mathrm{ch}z+B'\mathrm{sh}z}\quad(z=\beta s),\tag{5-60}$$

$$X_{B'}=\frac{1}{2}\log\left|\frac{B'-1}{B'+1}\right|=\frac{1}{2}\log\left|\frac{B-1}{B+1}\right|=X_B.$$

因此，利用(5-58)式和(5-59)式，我们有

$$G(z)=\frac{\left(1-\frac{z}{X_B}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{2X_Bz-z^2}{X_B^2+n^2\pi^2}\right]}{\prod_{n=0}^{\infty}\left[1-\frac{2X_Bz-z^2}{X_B^2+\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\pi^2}\right]}\tag{5-61}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{s}{\omega_0}\right)\prod_{n=1}^{\infty}(1+2\zeta_{1n}s/\omega_{1n}+s^2/\omega_{1n}^2)}{\prod_{n=0}^{\infty}(1+2\zeta_{2n}\,s/\omega_{2n}+s^2/\omega_{2n}^2)},\tag{5-62}$$

其中 $\omega_0=-X_B/\beta$，

$$\zeta_{1n}=\frac{-X_B}{\sqrt{X_B^2+n^2\pi^2}},\qquad \omega_{1n}=\sqrt{(X_B^2+n^2\pi^2)/\beta^2},$$

$$\zeta_{2n}=-X_B\Big/\sqrt{X_B^2+\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\pi^2},$$

$$\omega_{2n}=\sqrt{\left[X_B^2+\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\pi^2\right]\Big/\beta^2}。$$

取 $G_0(s)$ 作为 $G(s)$ 的近似式，这里

$$G_0(s)=\frac{1+s/\omega_0}{1+2\zeta_{20}s/\omega_{20}+s^2/\omega_{20}^2},\tag{5-63}$$

它对许多工程来说，已产生充分的精确性。若用 $G_r(s)$ 近似 $G(s)$，这里

$$G_r(s)=\frac{\left(1+\frac{s}{\omega_0}\right)\prod\limits_{n=1}^{r}(1+2\zeta_{1n}s/\omega_{1n}+s^2/\omega_{1n}^2)}{\prod\limits_{n=0}^{r}(1+2\zeta_{2n}s/\omega_{2n}+s^2/\omega_{2n}^2)},\tag{5-64}$$

则其精确性更高，没有更简单的展开式具有这样的精确性。

下面用一些具体的数字来进行验证。

若取 $B=K_0Z_0=1.56$，则 $X_B=-0.763$，$\beta=0.0176$，这时

$$\omega_0=43.4/秒,$$

$$\omega_{1n}=56.8[(0.763)^2+(n\pi)^2]^{1/2},$$

$$\omega_{2n}=56.8\left[(0.763)^2+\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\pi^2\right]^{1/2},$$

$$\zeta_{1n}=0.763/[(0.763)^2+n^2\pi^2]^{1/2},$$

$$\zeta_{2n}=0.763\Big/\left[(0.763)^2+\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\pi^2\right]^{1/2},$$

$$G_0(s)=\frac{1+s/43.4}{1+0.874\left(\frac{s}{99.3}\right)+\left(\frac{s}{99.3}\right)^2}。\tag{5-65}$$

令 $s=j\omega$，由图 5.2 所示，在频率为 0 到 15 赫兹的范围内，$G_0(j\omega)$ 与 $G(j\omega)$ 很好地符合。工程上，$j=\sqrt{-1}$。

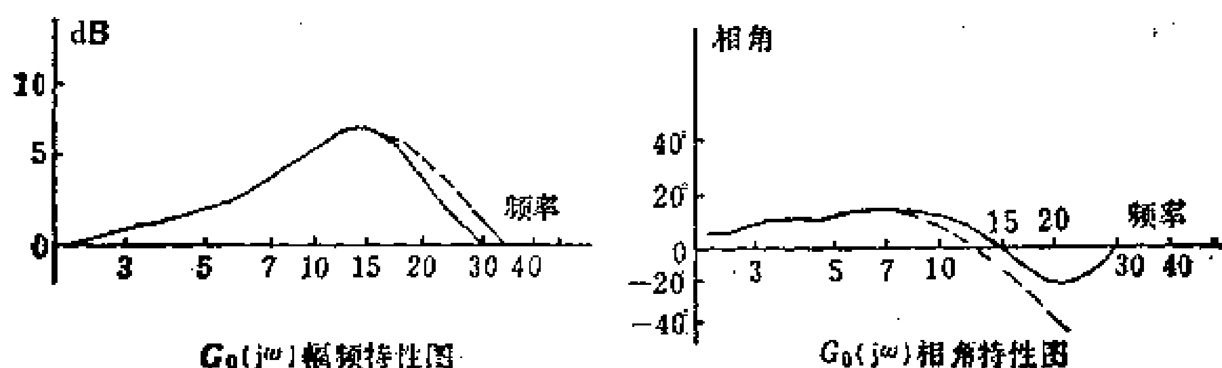
若取 $G_1(s)$ 作为 $G(s)$ 的近似式，这里

$$G_1(s)=\frac{\left(1+\frac{s}{\omega_0}\right)\left(1+\frac{2\zeta_{11}}{\omega_{11}}s+\frac{s^2}{\omega_{11}^2}\right)}{\left(1+2\frac{\zeta_{20}}{\omega_{20}}s+\frac{s^2}{\omega_{20}^2}\right)\left(1+2\frac{\zeta_{21}}{\omega_{21}}s+\frac{s^2}{\omega_{21}^2}\right)}。\tag{5-66}$$

如图 5.3 所示，在频率为 0 到 25 赫兹的范围内，$G_1(j\omega)$ 与 $G(j\omega)$ 很

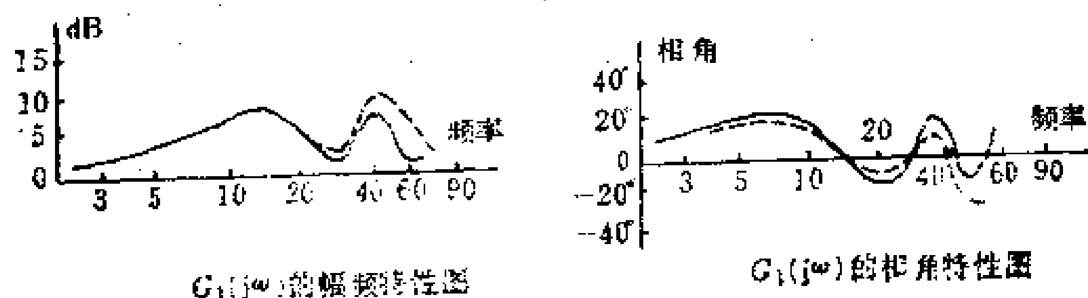
好地符合。

若取 $G_5(s)$ 作为 $G(s)$ 的近似式，如图 5.4 所示，在频率为 0 到 100 赫兹的范围内，$G_5(j\omega)$ 与 $G(j\omega)$ 非常符合。



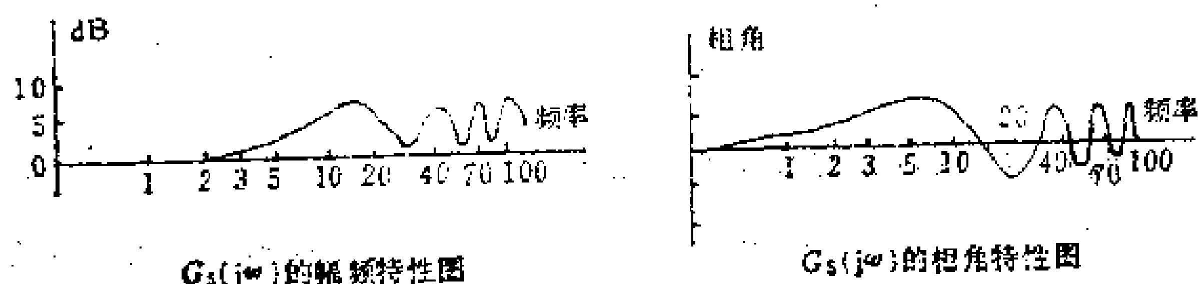
$G_0(j\omega)$ 幅频特性图　　$G_0(j\omega)$ 相角特性图

图 5.2



$G_1(j\omega)$ 的幅频特性图　　$G_1(j\omega)$ 的相角特性图

图 5.3



$G_5(j\omega)$ 的幅频特性图　　$G_5(j\omega)$ 的相角特性图

图 5.4

习　题

1. 设 $\{a_n\}$ 是复数序列，$0<|a_n|<1$，若 $m\neq n$，则 $a_m\neq a_n$。又若 $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|^2)<+\infty$，证明：乘积

$$g(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{z-a_n}{z-\frac{1}{\bar{a}_n}}$$

在圆 $|z|<1$ 内是收敛、解析的，它以 $\{a_n\}$ 为零点，且 $|g(z)|\leqslant 1$。

2. 证明：当 $|z|<1$ 时，$\prod_{n=1}^{\infty}(1+z^{2^n})=\frac{1}{1-z}$。

3. 证明：

$$\frac{\sin(iz)}{e^{2z}-1}=e^{h(z)},$$

其中 $h(z)$是整函数，问 $h(z)=?$

4. 若 $f_1(z)$，$f_2(z)$是有限阶整函数，其阶分别为 ρ_1，ρ_2，则 $f_1(z)f_2(z)$ 与 $f_1(z)+f_2(z)$的阶$\leqslant\max(\rho_1,\rho_2)$。又若 $\rho_1\neq\rho_2$，则 $f_1(z)+f_2(z)$ 的阶 $\rho=\max(\rho_1,\rho_2)$。

5. 求下列整函数的阶：

(1) $e^{Q(z)}$，$Q(z)$是多项式；(2) $\cos\sqrt{z}$；(3) e^{e^z}。

6. 将下列函数展开成无穷乘积：

(1) $e^{az}-e^{bz}$；　(2) $\operatorname{ch}z-\cos z$。

7. 证明：

$$\frac{\sin\pi z}{\pi z(1-z)}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z-z^2}{n^2+n}\right)。$$

§2　嘎玛函数

2.1　Γ 函数的定义和基本性质

Γ(Γamma) 函数是经典分析中最重要的函数。这函数可用多种方法引进，每种都有其自己的便利。我们将用无穷乘积的方法引进这种函数。

在负整数处有零点的最简单的函数是典型乘积

$$g(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}。\tag{5-67}$$

显然 $g(-z)$在正整数有零点，注意到 $\sin\pi z$ 的无穷乘积的表示式，我们有

$$g(z)g(-z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)=\frac{\sin\pi z}{\pi z}。\tag{5-68}$$

函数 $g(z-1)$与 $g(z)$有相同的零点，此外，$z=0$ 是 $g(z-1)$ 的零点。于是 $g(z-1)/zg(z)$ 是一非零的整函数。据上节中的定理 5，我们有

$$g(z-1)=ze^{h(z)}g(z),\tag{5-69}$$

其中 $h(z)$ 是一整函数。为了决定 $h(z)$，我们取对数导数。由上节中的定理 4，我们得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-1+n}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{z}+h'(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right)。$$

在左边的和式中用 $n-1$ 代替 n，则得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{z}+h'(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right)。$$

于是，我们有

$$h'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-1=0。$$

由此即得 $h(z)$是常数，记为 γ。于是，方程(5-69)成为

$$g(z-1)=ze^{\gamma}g(z)。\tag{5-70}$$

为了决定 γ，我们令 $z=1$，则得

$$1=g(0)=e^{\gamma}g(1);\tag{5-71}$$

因此

$$e^{-\gamma}=g(1)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-1/n}。$$

将上式两边取对数，则产生

$$\gamma=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right],$$

或者，因 $\log\left(1+\frac{1}{n}\right)=\log(n+1)-\log n$，上式为

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)。\tag{5-72}$$

实数 γ 被称为欧拉常数。由数值计算得到 $\gamma=0.5772156649\cdots$。

仿照魏尔斯特拉斯因子分解定理，我们现在定义 Γ 为

$$\Gamma(z)=\frac{1}{ze^{\gamma z}g(z)},\tag{5-73}$$

这就是说

$$\Gamma(z)=\frac{e^{-\gamma z}}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}e^{z/n},\tag{5-74}$$

引进因子 $e^{-\gamma z}$ 的理由是为了简单起见。由方程(5-70)，我们有

$$\Gamma(z+1)=\frac{1}{(z+1)e^{\gamma(z+1)}g(z+1)}=\frac{1}{e^{\gamma z}g(z)},$$

于是 Γ 满足下述基本递推关系：

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)。\tag{5-75}$$

重复应用这个关系式，对 $n=0,1,2,\cdots$，我们得到

$$\Gamma(z+n)=(z)_n\Gamma(z),\tag{5-76}$$

或者

$$(z)_n=\frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)},\tag{5-77}$$

其中 $(z)_n=z(z+1)\cdots(z+n-1)$。令 $z=1$，注意到 $\Gamma(1)=1$，即得

$$\Gamma(n+1)=n!。\tag{5-78}$$

这就是说，Γ 函数在右半平面内是解析的，且当 z 是整数时与阶乘函数一致。因而我们可以把 Γ 函数看作是阶乘函数在复平面上的开拓；换句话说，如果 $z\neq-1,-2,\cdots$，则 $z!=\Gamma(z+1)$ 是 $z!$ 的一个合理的定义。

将(5-68)式用 Γ 来表示，则我们有

$$\Gamma(z)\Gamma(-z)=-\frac{\pi}{\sin\pi z}。\tag{5-79}$$

置 $z=\frac{1}{2}$，则得

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2=\pi。$$

Γ 的乘积表示式说明，当 $z>0$ 时，$\Gamma(z)>0$，由此产生另一个重要的常数：

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}=1.7724538509\cdots。\tag{5-80}$$

由(5-76)式，即得

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{2}\right)_n,\quad n=0,1,2,\cdots。\tag{5-81}$$

如前所述，Γ 在 $z=0,-1,-2,\cdots$ 具有简单极点，我们要计算 Γ 在 $z=-n$ 的留数。据留数的计算公式，有

$$\operatorname{Res}(\Gamma,-n)=\lim_{z\to-n}(z+n)\Gamma(z)。$$

但是由方程(5-76)，有

$$(z+n)\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)},$$

因此，令 z 趋于 $-n$ 便得到

$$\operatorname{Res}(\Gamma,-n)=(-1)^n/(n!),\quad n\geqslant0。\tag{5-82}$$

对方程(5-75)取对数导数，我们有

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=-\frac{1}{z}-\gamma+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{z+n}\right)。\tag{5-83}$$

若令 $z=1$，即得

$$\Gamma'(1)=-\gamma,$$

此外由方程(5-77)或直接由(5-83)式，即得

$$\Gamma'(n+1)=n!\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\gamma\right),$$

其中 $n=1,2,\cdots$。对方程(5-83)再求一次导数，我们得到

$$\left[\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right]'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2}。\tag{5-84}$$

我们断定，对实数 $z, z\neq0,-1,-2,\cdots,\Gamma''(x)$ 总是与 Γ 有相同的符号。对实数 x，$\Gamma(x)$ 的描述性图像如图 5.5 所示。由极值性质，当

$x\to\infty$时，$\Gamma(x)$增长得非常快，比 e^x 的增长还迅速。

2.2 高斯公式和欧拉积分公式

我们现在将导出 Γ 函数的另外两种表示式。从无穷乘积的定义，即得$\Gamma(z)$是下列函数当 $n\to\infty$ 时的极限：

$$P_n(z)=\frac{e^{-\gamma z}}{z}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1}e^{z/k}。$$

上式恒等于

$$\exp\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\gamma\right)z\right]\frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}。$$

由方程(5-72)，指数因子能代替以

$$e^{z\log n}=n^z,$$

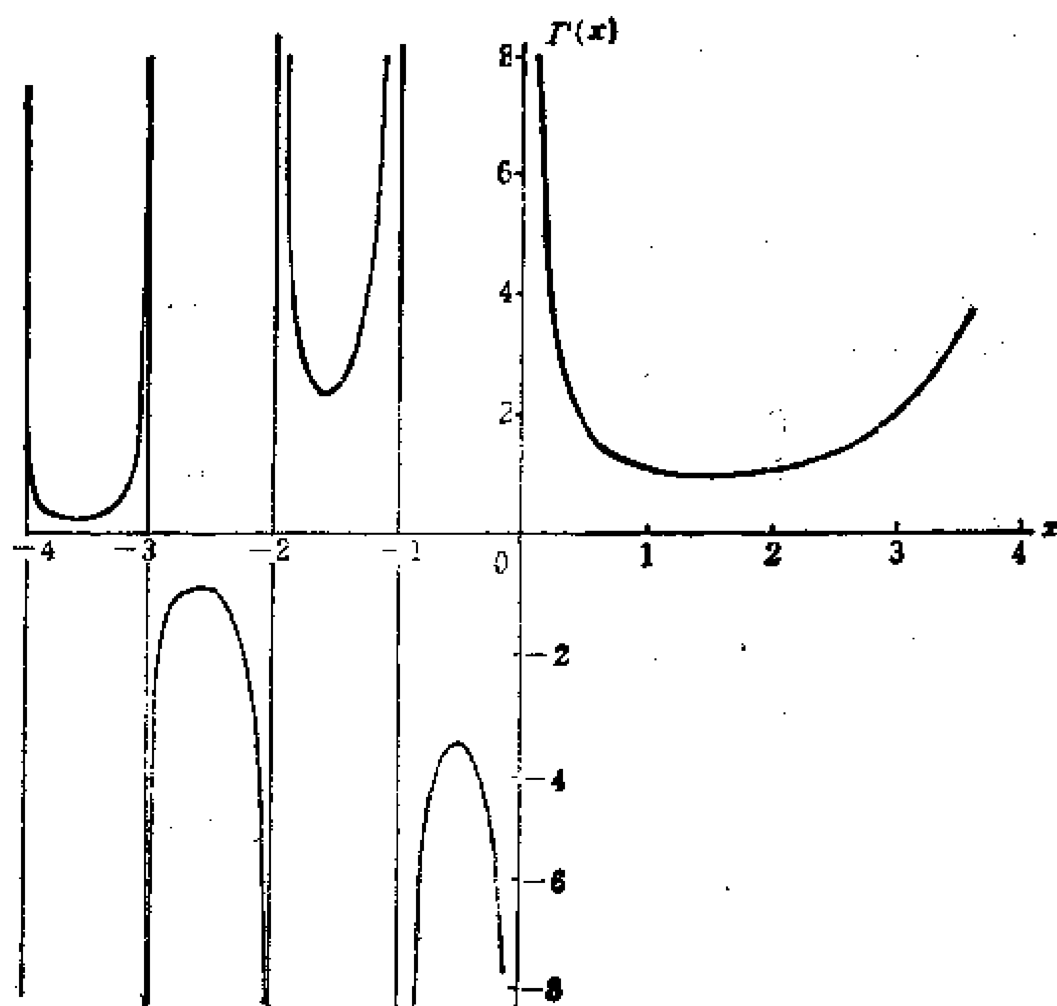


图 5.5

而不改变其极限。因此，对 $z\neq 0,-1,-2,\cdots$，我们有

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^z n!}{(z)_{n+1}}\text{。}\tag{5-85}$$

这公式是高斯研究 Γ 函数的出发点，称为**高斯公式**。这公式非常重要，由它能非常容易地导出 Γ 函数的重要性质。

我们用(5-85)式来证明所谓**勒襄特**(Legendre)**的加倍公式**：

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2z)}=2^{1-2z}\sqrt{\pi}\text{。}\tag{5-86}$$

设

$$f(z)=\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right),$$

显然，$z=0,\ -\frac{1}{2},-1,-\frac{3}{2},\cdots$ 是 $f(z)$ 的简单极点。函数 $\Gamma(2z)$ 恰以这些点为其简单极点，因此

$$g(z)=\frac{\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2z)}$$

是一整函数。为了得到一易于处理的表示式，注意到

$$\Gamma(2z)=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)^{2z}(2n)!}{(2z)_{2n+1}},$$

于是，由公式(5-85)，得

$$g(z)=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n^z}{(z)_{n+1}}\cdot\frac{n^{z+1/2}}{\left(z+\frac{1}{2}\right)_{n+1}}\cdot\frac{(2z)_{2n+1}}{(2n)^{2z}}\cdot\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right\}\text{。}\tag{5-87}$$

利用恒等式

$$(z)_{n+1}\left(z+\frac{1}{2}\right)_{n+1}=2^{-2n-2}(2z)_{2n+2},$$

$$(2n)!=2^{2n}\left(\frac{1}{2}\right)_n n!,$$

(5-87)式的右边可简化成

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2^{2z-2}}\cdot\frac{1}{2z+2n+1}\cdot\frac{n^{1/2}n!}{\left(\frac{1}{2}\right)_n}\right\},$$

它可以写成

$$\lim_{n\to\infty}\left\{2^{1-2z}\cdot\frac{n+\frac{1}{2}}{z+n+\frac{1}{2}}\cdot\frac{n^{1/2}n!}{\left(\frac{1}{2}\right)_{n+1}}\right\}。$$

这里，第一个因子与 n 无关，第二个因子趋于1，根据公式(5-85)，第三个因子趋于 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$。因此，由方程(5-87)，即得我们所要证明的勒襄特加倍公式(5-86)。

$\Gamma(z)$的第三个表示式是欧拉积分公式，它也是同等重要的，我们能从公式(5-85)导出这一表示式。首先可得到表示式

$$\Gamma_n(z)=\frac{n^z n!}{(z)_{n+1}} \tag{5-88}$$

的积分表示，当 $n\to\infty$ 时，其极限就是我们所要求的表示式。假设 $z=x>0$，我们注意到

$$\frac{1}{(x)_{n+1}}=\int_0^1\int_0^{\tau_n}\int_0^{\tau_{n-1}}\cdots\int_0^{\tau_1}\tau^{x-1}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau_1\cdots\mathrm{d}\tau_n。$$

根据已知的一个微积分公式，函数 $f(\tau)$的 $(n+1)$ 重积分能表示成单重积分：

$$\int_0^\xi\int_0^{\tau_n}\cdots\int_0^{\tau}f(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau_1\cdots\mathrm{d}\tau_n=\frac{1}{n!}\int_0^\xi(\xi-\tau)^n f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

（其证明是关于 ξ 的微分或者算符运算）。于是，我们有

$$\frac{n!}{(x)_{n+1}}=\int_0^1(1-\tau)^n\tau^{x-1}\mathrm{d}\tau。$$

令 $t=n\tau$，我们发现

$$\Gamma_n(x)=\frac{n!n^x}{(x)_{n+1}}=\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\mathrm{d}t。 \tag{5-89}$$

我们回忆起一个已知的极限，对一切实数或复数 s，有

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{s}{n}\right)^n=\mathrm{e}^{-s}。$$

如果对积分号下取极限和对积分号的上限取极限同时是可能的，则由

于 $\Gamma_n \to \Gamma$，我们便得到 $\Gamma(x)$ 的欧拉积分公式：

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt。 \quad (5\text{-}90)$$

这结果是正确的，但是二重极限能同时取进去是需要证明的。我们的目的是要证明，对一切复数 z，有

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt, \quad (5\text{-}91)$$

这就是所谓的 $\Gamma(z)$ 的欧拉积分公式。

下面我们来证明公式(5-91)。设 $f(t,z)$ 是一个二元函数，其中 z 位于复平面上的某区域 $\mathscr{D}$。若对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在常数 B_0，使得对 $B_0<B_1<B_2$ 及一切 $z\in\mathscr{D}$，成立着

$$\left|\int_{B_1}^{B_2}f(t,z)dt\right|<\varepsilon \quad 或者 \quad \int_{B_1}^{B_2}|f(t,z)|dt<\varepsilon,$$

则称积分

$$\int_0^\infty f(t,s)dt$$

对 $z\in\mathscr{D}$ 是**一致收敛**的，或者是**一致绝对收敛**的。

引理 1 设 I 是一个实数区间，可能是无限的，设 $\mathscr{D}$ 是复平面上的一开集。又设 $f=f(t,s)$ 是 $I\times\mathscr{D}$ 上的连续函数。假定：

(1) 对每个紧集 $\mathscr{K}\subset\mathscr{D}$，积分 $\int_I f(t,z)dt$ 对 $z\in\mathscr{K}$ 是一致收敛的；

(2) 对每个 t，函数 $z\mapsto f(t,z)$ 是解析的。设

$$F(z)=\int_I f(t,z)dt, \quad (5\text{-}92)$$

则 $F(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 上是解析的，并且

$$F'(z)=\int_I \frac{\partial}{\partial z}f(t,z)dt。 \quad (5\text{-}93)$$

此外，$\frac{\partial}{\partial z}f(t,z)$ 满足如 $f(z)$ 一样的条件。

证明 设 $\{I_n\}$ 是一有限闭区间的序列，且单调增加于 I。设 $\mathscr{S}$ 是 z-平面上的一个圆，其闭包 $\overline{\mathscr{S}}$ 位于 $\mathscr{D}$ 内。令 γ 是 $\mathscr{S}$ 的边界圆周，则

对每个 $z\in\mathscr{G}$，我们有

$$f(t,z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(t,\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,$$

于是

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{I}\int_{\gamma}\frac{f(t,\zeta)}{\zeta-z}d\zeta dt。$$

若 γ 的半径是 R，中心是 z_0，对一切 z，$|z-z_0|\leqslant R/2$，则

$$\left|\frac{1}{\zeta-z}\right|\geqslant 2/R。$$

对每个 n，我们定义

$$F_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{I_n}\int_{\gamma}\frac{f(t,\zeta)}{\zeta-z}d\zeta dt,$$

由于 $|z-z_0|\leqslant R/2$，我们能交换积分次序，得到

$$F_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{1}{\zeta-z}\left[\int_{I_n}f(t,z)dt\right]d\zeta。$$

由于 $\int_{I_n}f(t,\zeta)dt$ 是 $\mathscr{D}$ 上的，因而是 $\overline{\mathscr{G}}$ 上的连续函数。根据柯西型积分的性质，则 $F_n(z)$ 在 γ 的余集上是解析的。由假设可知，I_n 上的积分一致地收敛于 I 上的积分。$F(z)$ 作为 $F_n(z)$ 对 $z(|z-z_0|\leqslant R/2)$ 一致收敛的极限是解析的。另一方面，$F'_n(z)$ 是按通常的方法在积分号下求导数得到的，是一致地收敛于 $F'(z)$。但是，对 $|z-z_0|\leqslant R/2$，由于

$$F'_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{1}{\zeta-z}\left[\int_{I_n}\frac{\partial}{\partial z}f(t,z)dt\right]d\zeta$$

$$=\int_{I_n}\frac{\partial}{\partial z}f(t,z)dt,$$

因此，对 $|z-z_0|\leqslant R/2$，我们有

$$F'(z)=\int_{I}\frac{\partial}{\partial z}f(t,z)dt。$$

由于圆 $\overline{\mathscr{G}}(\subset\mathscr{D})$ 的任意性，故定理的结论在 $\mathscr{D}$ 上是成立的。引理证毕。

引理 2 设 $\mathscr{S}=\{z:a\leqslant\mathrm{Re}z\leqslant A\}$，其中 $0<a<A<\infty$。

（1）对于任何 $\varepsilon>0$，存在一个 $\delta>0$，使得当 $0<\alpha<\beta<\delta$ 时，对 $\mathscr{S}$ 中所有的 z，总有

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} e^{-t}t^{z-1}dt\right|<\varepsilon。\tag{5-94}$$

（2）对于任何 $\varepsilon>0$，存在一个常数 κ，使得当 $\beta>\alpha>\kappa$ 时，对 $\mathscr{S}$ 中所有的 z，总有

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} e^{-t}t^{z-1}dt\right|<\varepsilon。\tag{5-95}$$

证明　为了证明(1)，须注意到，如果 $0<t\leqslant1$ 且 z 在 $\mathscr{S}$ 中，则 $(\mathrm{Re}z-1)\log t\leqslant(a-1)\log t$；由于 $e^{-t}\leqslant1$，以及

$$|e^{-t}t^{z-1}|\leqslant t^{\mathrm{Re}z-1}\leqslant t^{a-1}。$$

因此，如果 $0<\alpha<\beta<1$，则对于 $\mathscr{S}$ 中所有的 z，成立

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} e^{-t}t^{z-1}dt\right|\leqslant\int_{\alpha}^{\beta} t^{a-1}dt=\frac{1}{a}(\beta^{a}-\alpha^{a})。$$

如果给定 $\varepsilon>0$，则我们可选取 $\delta, 0<\delta<1$，使得对于 $|\alpha-\beta|<\delta$，有 $a^{-1}(\beta^{a}-\alpha^{a})<\varepsilon$。这就证明了(1)。

为了证明(2)，须注意到，对于 $\mathscr{S}$ 中的 z 及 $t\geqslant1$，$|t^{z-1}|\leqslant t^{A-1}$。由于 $t^{A-1}\exp\left(-\frac{1}{2}t\right)$ 在 $[1,\infty)$ 上连续，且当 $t\to\infty$ 时收敛于零，所以存在一个常数 c，使得对于所有的 $t\geqslant1$，都有 $t^{A-1}\exp\left(-\frac{1}{2}t\right)\leqslant c$，这就得到，对于 $\mathscr{S}$ 中所有的 z 及 $t\geqslant1$，有

$$|e^{-t}t^{z-1}|\leqslant ce^{-\frac{1}{2}t},$$

若 $\beta>\alpha>1$，则

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} e^{-t}t^{z-1}dt\right|\leqslant c\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{1}{2}t}\,dt=2c\left(e^{-\frac{1}{2}\alpha}-e^{-\frac{1}{2}\beta}\right),$$

因此，对于任何 $\varepsilon>0$，必存在一个常数 $\kappa>1$，使得当 $\alpha,\beta>\kappa$ 时，总有 $|2c(e^{-\frac{1}{2}\alpha}-e^{-\frac{1}{2}\beta})|<\varepsilon$。这就证明了(2)。

这一引理的结论正好是积分

$$\int_{0}^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$$

对 $z\in\mathscr{S}=\{z:a\leqslant\mathrm{Re}z\leqslant A\}$ 是一致收敛的。

引理 3 设$\mathscr{G}=\{z:\mathrm{Re}z>0\}$，且对于 $n\geqslant 1$ 及$\mathscr{G}$内的 z，令

$$f_n(z)=\int_{\frac{1}{n}}^{n}e^{-t}t^{z-1}dt, \tag{5-96}$$

则每个 $f_n(z)$ 在$\mathscr{G}$内是解析的，且 $\{f_n(z)\}$ 在 $\mathscr{G}$ 上内闭均匀收敛于解析函数

$$f(z)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt,\quad \mathrm{Re}z>0。 \tag{5-97}$$

证明 把 $f_n(z)$看作是 $\varphi(t,z)=e^{-t}t^{z-1}$ 沿直路段$\left[\frac{1}{n},n\right]$的积分，则 $f_n(z)$ 在 $\mathscr{G}$ 内是解析的。若$\mathscr{K}$是$\mathscr{G}$内的任一紧子集，则存在正实数 a 和 A，使得$\mathscr{K}\subset\{z:a\leqslant\mathrm{Re}z\leqslant A\}$。由于对于 $m>n$，那么

$$f_m(z)-f_n(z)=\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}}e^{-t}t^{z-1}dt+\int_n^m e^{-t}t^{z-1}dt,$$

由引理 2，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，使得当 $m>n>N$ 时，对$\mathscr{K}$中所有的 z，总有

$$|f_m(z)-f_n(z)|<\varepsilon。$$

这说明序列$\{f_n\}$在紧子集$\mathscr{K}$上是一致收敛的。由于$\mathscr{K}$是$\mathscr{G}$内的任一紧子集，故$\{f_n(z)\}$在$\mathscr{K}$上内闭一致收敛于某一个解析函数

$$f(z)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt。$$

引理 4 (1) $\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right\}$$\mathscr{K}$在$=\{z:\mathrm{Re}z>0\}$ 上内闭均匀收敛于 e^z。

(2) 如果 $t\geqslant 0$，则对于所有的 $n\geqslant t$，$\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\leqslant e^{-t}$。

证明 (1) 设$\mathscr{K}$为平面的紧子集，则对于$\mathscr{K}$中所有的 z，当 n 充分大时，有 $|z|<n$。首先，我们证明，对$\mathscr{K}$中的 z 一致地有

$$\lim_{n\to\infty}n\log\left(1+\frac{z}{n}\right)=z。 \tag{5-98}$$

我们记得，对于 $|w|<1$，有

$$\log(1+w)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{w^k}{k}。$$

设对于$\mathscr{K}$中所有的 z，$n>|z|$，若 $z\in\mathscr{K}$，则

$$n\log\left(1+\frac{z}{n}\right)=z-\frac{1}{2}\frac{z^2}{n}+\frac{1}{3}\frac{z^3}{n^2}-\cdots.$$

因此

$$n\log\left(1+\frac{z}{n}\right)-z=z\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{n}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{z}{n}\right)^2-\cdots\right], \qquad (5\text{-}99)$$

将上式取绝对值，得到

$$\left|n\log\left(1+\frac{z}{n}\right)-z\right|\leqslant|z|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}\left|\frac{z}{n}\right|^{k-1}$$

$$\leqslant|z|\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{z}{n}\right|^{k}=\frac{|z|^2}{n}\cdot\frac{1}{1-\left|\frac{z}{n}\right|}$$

$$\leqslant\frac{R^2}{n-R},$$

其中对于$\mathscr{K}$中所有的 z 有 $|z|\leqslant R$。令 $n\to\infty$，则这个差对 $\mathscr{K}$ 中所有的 z 一致地收敛于零。故方程(5-98)在$\mathscr{K}$上一致地成立。

令 $g_n(z)=n\log\left(1+\frac{z}{n}\right)$。对任给的 $\delta>0$，则存在自然数 N，N 仅与 δ 有关，使得当 $n>N$ 时，对$\mathscr{K}$中一切 z，有 $|g_n(z)-z|<\delta$。由于

$$\left|\frac{\exp g_n(z)}{\exp z}-1\right|=|e^{g_n(z)-z}-1|$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}|g_n(z)-z|<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\delta^k$$

$$=e^{\delta}-1,$$

以及对任意给定的正数 ε 和 R，存在 $\delta>0$，使得 $e^{\delta}-1<\varepsilon e^{-R}$，所以，对$\mathscr{K}$上的一切 z 及 $n>N$，有

$$|\exp g_n(z)-\exp z|<\varepsilon e^{-R}|\exp z|<\varepsilon,$$

其中 R 的选取满足对$\mathscr{K}$中一切 z 有 $\mathrm{Re}z\leqslant R$。故(1)的结论是真实的。

(2) 现在设 $t\geqslant0$，且在(5-99)中用 $-t$ 代替 z，其中 $n>t$，便有

$$n\log\left(1-\frac{t}{n}\right)+t=-t\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{t}{n}\right)^{k-1}\leqslant0.$$

所以

$$n\log\left(1-\frac{t}{n}\right)\leqslant -t。$$

因为 exp 是单调函数，所以，(2)是成立的。

定理 1 如果 $\mathrm{Re}z>0$，则

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt。\tag{5-100}$$

证明 设

$$f(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt,$$

由引理 2，积分 $\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$ 在 $S=\{z:0<a\leqslant \mathrm{Re}z\leqslant A<\infty\}$ 上是一致收敛的。于是，由引理 1，函数 $f(z)$ 在 $\mathscr{S}$ 上是解析的。因此，为了证明在 $\mathrm{Re}z>0$ 内 $\Gamma(z)=f(z)$，我们只需证明，对于 $x\geqslant 1$ 有 $\Gamma(x)=f(x)$。由于 $f(z)$ 和 $\Gamma(z)$ 在右半平面内都是解析的，所以，据解析函数的唯一性定理，在 $\mathrm{Re}z>0$ 内，我们有 $\Gamma(z)=f(z)$。

又由公式(5-89)并根据高斯公式(5-85)，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x)=\Gamma(x)。$$

如果对于 $x\geqslant 1$ 我们能证明，方程(5-89)右边的积分当 $n\to\infty$ 时收敛于 $\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt=f(x)$，则定理 5 便得到证明。

由引理 3，函数列 $f_n(x)=\int_{1/n}^{n} e^{-t}t^{x-1}dt$ 在右半平面内内闭一致地收敛于 $f(x)$。因此，我们只需要证明

$$\lim_{n\to\infty}[f_n(x)-\Gamma_n(x)]=0,\quad x\geqslant 1。$$

事实上

$$f_n(x)-\Gamma_n(x)=-\int_0^{\frac{1}{n}}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt$$
$$+\int_{\frac{1}{n}}^{n}\left[e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]t^{x-1}dt。$$

对任意给定的 $\varepsilon>0$，根据引理 2 中的(2)，存在数 $\kappa>0$，使得当 $r>\kappa$ 时，对一切 $x>0$，有

$$\left|\int_\kappa^r e^{-t}t^{x-1}dt\right|<\varepsilon/4。\qquad (5\text{-}101)$$

根据引理 4 的(2)和引理 2 的(1)，对于充分大的 n，有

$$\int_0^{\frac{1}{n}}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt\leqslant\int_0^{\frac{1}{n}}e^{-t}t^{x-1}dt<\frac{\varepsilon}{4}.\qquad (5\text{-}102)$$

另外，如果 n 充分大，则根据引理 4 的(1)，对于$[0,\kappa]$中的 t，有

$$\left|\left(1-\frac{t}{n}\right)^n-e^{-t}\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{4M\kappa},\qquad (5\text{-}103)$$

其中$M=\int_0^\kappa t^{x-1}dt$。于是

$$\left|\int_{\frac{1}{n}}^\kappa\left[e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]t^{x-1}dt\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{4}。\qquad (5\text{-}104)$$

应用引理 4 的(2)及(5-101)式，对于 $n>\kappa$，成立

$$\left|\int_\kappa^n\left[e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]t^{x-1}dt\right|\leqslant 2\int_\kappa^n e^{-t}t^{x-1}dt\leqslant\frac{\varepsilon}{2}。$$

联合这不等式与(5-103)式和(5-104)式，对充分大的 n，便可得到

$$\left|f_n(x)-\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt\right|<\varepsilon,$$

即

$$0=\lim[f_n(x)-\Gamma_n(x)]=f(x)-\Gamma(x)。$$

这就完成了定理 1 的证明。

另外，由引理 5 和 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$，我们有

$$\sqrt{\pi}=\int_0^\infty e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt,$$

作变数变换 $t=s^2$，得到

$$\sqrt{\pi}=\int_0^\infty e^{-s^2}s^{-1}(2s)ds=2\int_0^\infty e^{-s^2}ds,$$

即

$$\int_0^\infty e^{-s^2}ds=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.\qquad (5\text{-}105)$$

这个积分通常应用于概率论中。

2.3 斯斗林公式

前面我们讨论了Γ函数的基本定理，现在我们来讨论Γ函数的另一重要而更技巧性的结果，即所谓斯斗林 (Stirling) 公式，它描述了Γ函数当$|z|\to\infty$时的渐近性质。斯斗林公式 (5-106) 的优点是在于它给出了精确的误差项：

$$\log\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\log z-z+\frac{1}{2}\log(2\pi)-\int_0^\infty\frac{P_1(t)}{z+t}\mathrm{d}t, \tag{5-106}$$

其中$P_1(t)=t-[t]-\dfrac{1}{2}$是锯齿函数，$[t]$表示不超过$t$的最大整数，log 是取主值，即在复数平面上除去负实轴，这是因为Γ函数的所有极点位于其上。含有$P_1(t)$的积分之误差项的用处是，在复数$z=re^{i\theta}$平面的每个扇形

$$-\pi+\delta\leqslant\theta\leqslant\pi-\delta, 0<\delta<\pi$$

内，它一致地趋于零。

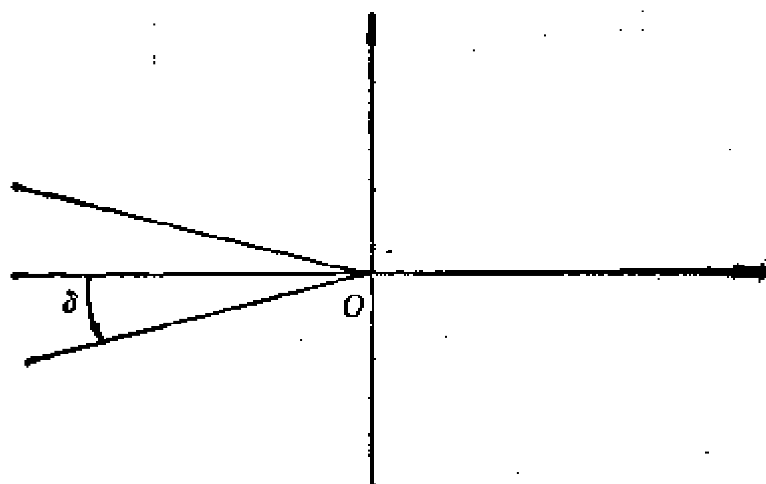


图 5.6

当$z=n$是个正整数时，用斯斗林公式能证明

$$n!=n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}\,\mathrm{e}^{\lambda/12n}, \tag{5-107}$$

其中$|\lambda|\leqslant1$。由于$n!=\Gamma(n+1)$，人们看到，渐近关系：

$$n!\sim n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi}, \tag{5-108}$$

是下述关系的特殊情形

$$\Gamma(z)\sim z^{z-1/2}e^{-z}\sqrt{2\pi},\qquad(5\text{-}109)$$

当 $|z|\to\infty$ 时，它在前述的每个扇形内是一致有效的。符号"$\sim$"表示，当 $|z|\to\infty$ 时，左边项除以右边项之商趋于1。

现在来证明斯斗林公式。

欧拉求和公式 设 $f(z)$ 是任一单实变数的 C^1 函数，即 $f'(z)$ 是连续的，则

$$\sum_{k=0}^{n}f(k)=\int_0^n f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}(f(n)+f(0))+\int_0^n P_1(t)f'(t)\mathrm{d}t。\qquad(5\text{-}110)$$

证明 锯齿函数看上去像一根锯条。注意

$$P'_1(t)=1$$

对不是整数的 t 成立，见图 5.7。

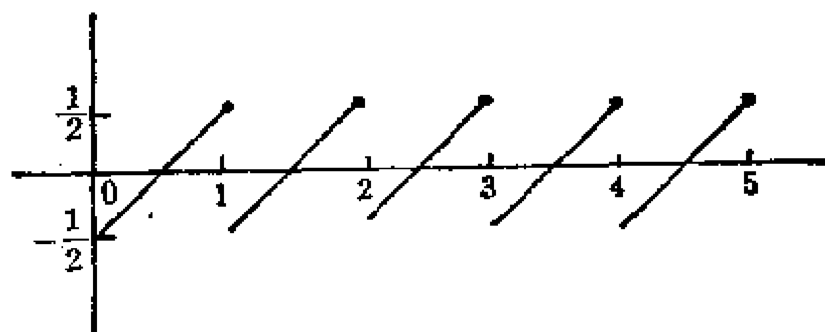


图 5.7

令 $u=P_1(t)$，$\mathrm{d}v=f'(t)\mathrm{d}t$，实行部分积分，便有

$$\int_{k-1}^{k}P_1(t)f'(t)\mathrm{d}t=P_1(t)f(t)\Big|_{k-1}^{k}-\int_{k-1}^{k}f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}(f(k)+f(k-1))-\int_{k-1}^{k}f(t)\mathrm{d}t.$$

将上式从 $k=1$ 到 $k=n$ 求和，再加上积分

$$\int_0^n f(t)\mathrm{d}t\ \text{和}\ \frac{1}{2}(f(n)+f(0)),$$

便得到方程(5-110)。

我们现在把公式(5-110)应用于函数

$$f(t)=\log(z+t) \quad 和 \quad f(t)=\log(1+t),$$

并且直到进一步通知之前，假定 z 是正实数，则讨论 log 及其性质就没有困难了。将这两个函数的欧拉公式相减，并回忆起

$$\int \log x \mathrm{d}x = x\log x - x,$$

我们得到

$$\begin{aligned}\log\frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!(n+1)} = & z\log(z+n)+n\log(z-n)-z\log z \\ & -(z+n)+z+\frac{1}{2}(\log(z+n)+\log z) \\ & -(n+1)\log(n+1)+(n+1) \\ & -1+\frac{1}{2}\log(n+1) \\ & +包含 P_1(t) 的积分的项, \qquad (5\text{-}111)\end{aligned}$$

上式中

$$z\log(z+n)=z\log n\left(1+\frac{z}{n}\right)=z\log n+z\log\left(1+\frac{z}{n}\right).$$

项 $z\log n$ 正好是 $\log n^z$，并且把它移到(5-111)的左边。

另一方面，我们注意到，$n+1$ 出现在(5-111) 式左边的分母中，把 $-\log(n+1)$ 从左边移到右边去，并且改变符号。在(5-111) 式的右端，我们尽可能地消去一些项，直到其它项中成为

$$-\left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{z}{n}\right)$$

而告终。但由泰勒展开式，对大的 n (和固定的 z)，我们有

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad \log\left(1+\frac{z}{n}\right)=\frac{z}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

于是，当 $n\to\infty$ 时，容易取极限，根据公式(5-85)，我们发现

$$\log\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\log z-z+1+\int_0^\infty\frac{P_1(t)}{1+t}\mathrm{d}t+\int_0^\infty\frac{P_1(t)}{z+t}\mathrm{d}t \tag{5-112}$$

对一切正实数的 z 是有效的。下面我们将证明，右端的积分关于 z 在除去负实轴的开集上是解析的。由于

$$\log\Gamma(z),\ z\log z,\ \log z,\ z$$

在这个开集上是解析的，即得公式（5-112）在这个开集中的一切点是成立的。

在讨论右端积分的解析性之前，我们来计算常数

$$1+\int_0^\infty \frac{P_1(t)}{1+t}dt。$$

下面我们将证明，对纯虚数的 z，$z=iy$，我们有

$$\lim_{y\to\infty}\int_0^\infty \frac{P_1(t)}{iy+1}dt=0。\qquad (5\text{-}113)$$

从

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}\ 和\ \Gamma(1-z)=-z\Gamma(-z),$$

我们得到

$$\Gamma(z)\Gamma(-z)=\frac{-\pi}{z\cdot\sin\pi z},$$

于是

$$|\Gamma(iy)|=\sqrt{\frac{2\pi}{y(e^{\pi y}-e^{-\pi y})}}。$$

从（5-112）式，我们得到

$$\begin{aligned}
&1+\int_0^\infty \frac{P_1(t)}{1+t}dt\\
&=\mathrm{Re}\left\{\log\Gamma(iy)-\left(iy-\frac{1}{2}\right)\log(iy)+iy+\int_0^\infty\frac{P_1(t)}{iy+t}dt\right\}\\
&=\lim_{y\to\infty}\left\{\log|\Gamma(iy)|+\frac{1}{2}\log y+\frac{\pi y}{2}\right\}\\
&=\lim_{y\to\infty}\log\sqrt{\frac{2\pi}{y(e^{\pi y}-e^{-\pi y})}}\\
&=\frac{1}{2}\log 2\pi。
\end{aligned}\qquad (5\text{-}114)$$

因此，除了仍必须证明前面所述积分的解析性和（5-113）式之外，斯

斗林公式(5-106)便得到了证明。我们把它们作为引理。

令

$$P_2(t)=\frac{1}{2}(t^2-t),\quad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

把 $P_2(t)$周期地（周期为 1）扩充到整个实数轴上，则 $P_2(n)=0$ 对一切整数 n 成立，并且 $P_2(t)$是有界的。此外，$P_2'(t)=P_1(t)$。

引理 6 对不是位于负实轴上的 z，我们有

$$\int_0^\infty \frac{P_1(t)}{z+t}\,\mathrm{d}t=\int_0^\infty \frac{P_2(t)}{(z+t)^2}\,\mathrm{d}t。\tag{5-115}$$

积分在复平面上除去负实轴所得的开集上是解析的，并且在右半平面上按通常的方法在积分号下能进行微分。

证明 我们写

$$\int_0^\infty=\sum_{n=0}^\infty\int_n^{n+1}。$$

在每个区间 $[n,n+1]$上的部分积分给出了引理的恒等式。包含 $P_2(t)$ 的积分显然是绝对收敛的，并且引理 1 是适用的。

注意到，在积分号下进行微分，对 $\Gamma'(z)/\Gamma(z)$ 能产生好的误差项，即

$$\Gamma'(z)/\Gamma(z)=\log z-\frac{1}{z}+2\int_0^\infty \frac{P_2(t)}{(z+t)^3}\,\mathrm{d}t。\tag{5-116}$$

引理 7

$$\lim_{y\to\infty}\int_0^\infty \frac{P_1(t)}{\mathrm{i}y+1}\,\mathrm{d}t=0。$$

证明 由引理 6，这极限是明显的。

习 题

1. 用高斯公式(5-85)推导 $\Gamma(z)$的基本性质。
2. 借助公式(5-74)建立勒襄特加倍公式。
3. 证明：对实的 y，有

$$|\Gamma(\mathrm{i}y)|^2=\frac{\pi}{y\operatorname{sh}\pi y},\qquad \left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}y\right)\right|^2=\frac{\pi}{\operatorname{ch}\pi y}。$$

4. 利用乘积表示式，证明：对实的 x 和 y，$x>0$，$y\neq 0$，成立

$$\left|\frac{\Gamma(x+\mathrm{i}y)}{\Gamma(x)}\right|<1.$$

5. 证明(5-86)式的下列拓广：对 $n=1,2,\cdots$，成立着

$$\sum_{k=0}^{n-1}\Gamma\left(z+\frac{k}{n}\right)=(2\pi)^{(n-1)/2}n^{1/2-nz}\Gamma(nz).$$

6. 证明：

$$\prod_{k=1}^{\infty}\Gamma\left(\frac{k}{3}\right)=\frac{640}{3^{6}}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)^{3}.$$

7. 证明：对 $m=2,3,\cdots$，成立

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\left(\frac{z}{m}\right)^{m}\right)^{-1}=-z^{m}\prod_{k=1}^{m}\Gamma\left(-z\mathrm{e}^{(2\pi\mathrm{i}k)/m}\right).$$

8. 证明：下列乘积条件收敛

$$(1-z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(1-\frac{z}{3}\right)\left(1+\frac{z}{4}\right)\cdots$$

9. 从公式(5-91)推导

$$\int_{1}^{\infty}\xi^{-2}(\log\xi)^{\alpha}\mathrm{d}\xi=\Gamma(\alpha+1),\quad \alpha>-1.$$

10. 从公式(5-85)导出

$$\log\Gamma(z+1)=\lim_{n\to\infty}\left\{z\log n-\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{z}{k}\right)\right\}.$$

借助将 log 展开成 z 的幂级数，证明：对 $|z|<1$，成立

$$\log\Gamma(z+1)=-\gamma z+\sum_{m=2}^{\infty}(-1)^{m}\frac{z^{m}}{m}\sigma_{m},\tag{5-117}$$

其中

$$\sigma_{m}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{m}},\quad m=2,3,\cdots.$$

11. 证明：对 $\operatorname{Re}z\geqslant 0$，有

$$\Gamma'(z)/\Gamma(z)=\int_{0}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}-\frac{\mathrm{e}^{-zt}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\right]\mathrm{d}t$$

(提示：用 $1/(z+n)=\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-t(z+n)}\mathrm{d}t$)。

12. 若 a 和 b 是任意两个复数，证明：

$$\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)}\sim z^{a-b}\ (\text{主值})$$

当 z 在每个扇形 $S_\theta(\theta<\pi)$ 内趋于 ∞ 时是一致的。

13. 证明：若 a 不是整数，又若 $\mathrm{Re}a<1$，则

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(1+n)}=2^{-a}\Gamma(a).$$

§3 亚纯函数展开为部分分式

3.1 米打格-来夫来尔定理

假定函数 $f(z)$ 在 z_0 有极点，其在 $z=z_0$ 的劳朗展开式为

$$f(z)=\frac{a_m}{(z-z_0)^m}+\cdots+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots,$$

我们称

$$\frac{a_m}{(z-z_0)^m}+\cdots+\frac{a_{-1}}{(z-z_0)}=P_0\left(\frac{1}{z-z_0}\right) \qquad (5\text{-}118)$$

为 $f(z)$ 在 z_0 处的主要部分。

类似于前一节，我们将考虑构造一个亚纯函数，它在离散点序列 $\{z_n\}$ 具有给定的主要部分。

定理 1（米打格-来夫来尔（Mittag-Leffler）定理） 设 $\{z_n\}$ 是不同的复数序列，且 $|z_n|\to\infty$。设 $\{P_n(z)\}$ 是没有常数项的多项式序列。则存在一个亚纯函数 $f(z)$，它恰以 $\{z_n\}$ 和 $\{P_n(1/(z-z_n))\}$ 为其极点及相应的主要部分。最一般的这种函数能写成下述形式：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)-Q_n(z)\right]+h(z), \qquad (5\text{-}119)$$

其中 $Q_n(z)$ 是某个多项式，而 $h(z)$ 是整函数。在不包含极点的任何紧集上，(5-119)式中的级数是绝对、一致收敛的。

证明 由于在原点的主要部分总能加到级数的尾部上去，因此我们不妨假定，对一切 n，$z_n\neq0$。我们在原点把

$$P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$$

展开成幂级数。令 $Q_n(z)$ 是上述这级数中其次数 $\leqslant d_n-1$ 的部分和，d_n 将适当地选取。则 $Q_n(z)$ 是次数为 d_n-1 的多项式。对 $|z|\leqslant|z_n|/2$，

我们有

$$\left|P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)-Q_n(z)\right|\leqslant B_n\left|\frac{z}{z_n}\right|^{d_n},$$

其中 B_n 是某一固定的数，它依赖于 $P_n(1/(z-z_n))$。我们选取 d_n 充分大，使得当 $n\to\infty$ 时，有

$$\frac{B_n^{1/d_n}}{|z_n|}\to 0,$$

而且使得$\{d_n\}$构成增加序列，$d_1<d_2<\cdots$，则级数

$$\sum_n\left[P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)-Q_n(z)\right] \tag{5-120}$$

在不包含 $\{z_n\}$ 的紧集上绝对一致收敛。事实上，给定半径 R，令 $R\leqslant |z_N|$，且把级数(5-120)分裂成

$$\sum_{n=1}^{N}\left[P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)-Q_n(z)\right]+\sum_{N+1}^{\infty}\left[P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)-Q_n(z)\right], \tag{5-121}$$

可见，第一部分是有限和。若 $|z|\leqslant R/2$，则第二个和式被级数

$$\sum(B_n/|z_n|^{d_n})z^{d_n}$$

所控制，它的收敛半径等于∞。所以，级数(5-121)在 $|z|\leqslant R/2$ 内不包含极点的任何紧集上是绝对并一致收敛的。此外，(5-121)式右边的第一个和式具有所希望的极点，而第二个和式在 $|z|\leqslant R/2$ 内没有极点。由于这对任何 R 是成立的，故由(5-120) 式所确定的亚纯函数具有定理中所要求的性质。因此，方程 (5-119) 所给定的函数是最一般的这种亚纯函数。定理证毕。

定理 2（米打格-来夫来尔定理） 若函数 $f(z)$ 是一个亚纯函数，$\{z_n\}(n=1,2,\cdots)$ 是 $f(z)$的互相判别的极点，且

$$|z_1|\leqslant|z_2|\leqslant\cdots\leqslant|z_n|\leqslant\cdots,\quad \lim_{n\to\infty}|z_n|=+\infty,$$

则

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)-Q_n(z)\right]+h(z), \tag{5-122}$$

其中 $P_n(1/(z-z_n))$是 $f(z)$ 在极点 z_n 的主要部分，$Q_n(z)$ 是多项式，$h(z)$是整函数。

证明 根据定理 1，存在一个亚纯函数 $g(z)$，使得

$$g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)-Q_n(z)\right]$$

恰以 z_n 为极点，且在点 z_n 的主要部分就是 $f(z)$ 在 z_n 的主要部分 $P_n(1/(z-z_n))$，并且它在不包含 $f(z)$ 的极点的任何紧集上绝对地、一致地收敛。

现在考虑函数

$$h(z)=f(z)-g(z)。$$

因为 $g(z)$与 $g(z)$有相同的极点$\{z_n\}(n=1,2,\cdots)$，且在 z_n 有相同的主要部分 $P_n(1/(z-z_n))$，因此，若定义 $h(z_n)=\lim\limits_{z\to z_n}\{f(z)-g(z)\}$，则 z_n 是 $h(z)$的可去奇点，于是，$h(z)$是一整函数，即

$$f(z)=h(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)-Q_n(z)\right]。$$

定理证毕。

3.2 柯西方法

根据定理 2，亚纯函数可以展成部分分式，但对于其中的 $h(z)$，我们只知道它是一整函数，且对每个 n，我们只知道多项式 $Q_n(z)$是 $P_n(1/(z-z_n))$ 在原点的幂级数展开式的某部分和，其次数一般是随 n 变化的。下述柯西方法是应用留数定理，在对 $f(z)$的补充假定下，证明 $h(z)$ 是一多项式，且 $Q_n(z)(n=1,2,\cdots)$ 都是次数相同的多项式。

定理 3 设 $f(z)$是一亚纯函数，$\{z_n\}(n=1,2,\cdots)$是 $f(z)$ 的互相不同的极点，且 $|z_n|\leqslant|z_{n+1}|$，$\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=+\infty$。设存在一列可求长的若当闭曲线$\{\gamma_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$，它们都包含原点在其内部，且都不经过 $f(z)$的极点，并满足下列条件：

(1) γ_{n+1} 位于 γ_n 的外部$(n=1,2,\cdots)$；

(2) $d_n=d(0,\gamma_n)\to+\infty(n\to+\infty)$；

(3) $L_n/d_n\leqslant A$(常数)，L_n 是 γ_n 的长度。

假定 $f(z)$在 γ_n 上满足条件：

$$|f(z)|\leqslant B|z|^q, \tag{5-123}$$

其中 q 是非负整数，B 是正的常数。则

$$f(z)=\sum_{j=0}^{q}\frac{f^{(j)}(0)}{j!}+\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[P_k\left(\frac{1}{z-z_k}\right)-\sum_{j=0}^{q}\frac{P_k^{(j)}(0)}{j!}z^j\right],\tag{5-124}$$

其中 $P_k=P_k(1/(z-z_k))$。

证明 不妨假设 $f(z)$ 在点 $z=0$ 解析。不然，只要考虑 $f(z)-p_0(z)$，$p_0(z)$ 是 $f(z)$ 在点 $z=0$ 邻域内的劳朗展开式的主要部分。考虑积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta。$$

由留数定理，不难证明

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=f(z)-\sum_{z_k\text{位于}\gamma_n\text{内}}p_k(z)。\tag{5-125}$$

事实上，若设 $\Gamma_n(z)=\sum\limits_{z_k}p_k(z)$，这里的求和是对位于 γ_n 内的 $f(z)$ 的极点而言的，它是有理函数，则 $f(z)-\Gamma_n(z)$ 在 γ_n 内是解析的，所以由柯西积分公式，有

$$f(z)-\Gamma_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{f(\zeta)-\Gamma_n(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}dz-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{\Gamma_n(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta。$$

$\Gamma_n(\zeta)/(\zeta-z)$ 作为 ζ 的函数，在 γ_n 的外部是解析的，因此，对一切充分大的 R，$R>d_n$，根据柯西积分定理，我们得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{\Gamma_n(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{\Gamma_n(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,$$

但是，$\zeta=\infty$ 是 $\dfrac{\Gamma_n(\zeta)}{\zeta-z}$ 的 $m(m\geqslant 2)$ 级零点，因此，当 $R\to+\infty$ 时，上式右端的积分值趋于零。从而，上式左端的积分等于零，即

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{\Gamma_n(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=0。$$

于是

$$f(z)-\Gamma_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,$$

由于

$$\frac{1}{\zeta-z}=\sum_{j=0}^{q}\frac{z^j}{\zeta^{j+1}}+\frac{1}{\zeta-z}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^{q+1},$$

所以

$$f(z)=\Gamma_n(z)+\sum_{j=0}^{q}\frac{z^j}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{j+1}}d\zeta$$

$$+\frac{z^{q+1}}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{q+1}(\zeta-z)}d\zeta。\tag{5-126}$$

又由于$f(\zeta)-\Gamma_n(\zeta)$在γ_n内解析，则根据柯西积分定理，我们有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{f(\zeta)-\Gamma_n(\zeta)}{\zeta^{j+1}}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\varepsilon}\frac{f(\zeta)-\Gamma_n(\zeta)}{\zeta^{j+1}}d\zeta$$

$$=\frac{1}{j!}f^{(j)}(0)-\frac{1}{j!}\Gamma_n^{(j)}(0)。$$

但是，由于

$$\Gamma_n^{(j)}(0)=\sum_{z_k\in\gamma_n\text{内}}p_k^{(j)}(0),$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{\Gamma_n(\zeta)}{\zeta^{j+1}}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{\Gamma_n(\zeta)}{\zeta^{j+1}}d\zeta\to 0\quad(R\to+\infty)。$$

所以，我们有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{j+1}}d\zeta=\frac{1}{j!}\left[f^{(j)}_{(0)}-\sum_{z_k\in\gamma_n\text{内}}p_k^{(j)}(0)\right]。\tag{5-127}$$

令

$$I_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{q+1}(\zeta-z)}d\zeta,$$

因在γ_n上，$|\zeta|\geqslant d_n$，$|f(\zeta)|\leqslant B|\zeta|^q$，并且当$n\to+\infty$时，$d_n\to+\infty$，所以当$n$充分大时，可使得$d_n>|z|$。于是

$$|I_n(z)|\leqslant\frac{BL_n}{2\pi d_n(d_n-|z|)}$$

$$\leqslant\frac{AB}{2\pi(d_n-|z|)}\to 0\quad(n\to+\infty)。$$

由此可见，对任意给定的R，当$|z|\leqslant R$时，

$$|z^{q+1}I_n(z)| \leqslant \frac{ABR^{q+1}}{2\pi(d_n-R)} \to 0 \quad (n\to+\infty), \tag{5-128}$$

即 $z^{q+1}I_n(z)$在 $|z|\leqslant R$ 内一致地趋于零。

把方程(5-127)代入(5-126)式，我们有

$$f(z)=\sum_{j=0}^{q}\frac{f^{(j)}(0)}{j!}+\sum_{z_k\in\gamma_n\text{内}}\left[P_k\left(\frac{1}{z-z_k}\right)\right.$$
$$\left.-\sum_{j=0}^{q}\frac{p_k^{(j)}(0)}{j!}z^j\right]+z^{q+1}I_n(z), \tag{5-129}$$

这方程对一切 n 成立。由(5-128)式，我们即得

$$f(z)=\sum_{j=0}^{q}\frac{f^{(j)}(0)}{j!}+\lim_{n\to+\infty}\sum_{z_k\in\gamma_n}\left[P_k\left(\frac{1}{z-z_k}\right)-\sum_{j=0}^{q}\frac{p_k^{(j)}(0)}{j!}z^j\right],$$

这就是我们所要求的方程(5-124)。定理证毕。

由上述证明可知，如果级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[P_k\left(\frac{1}{z-z_k}\right)-\sum_{j=0}^{q}\frac{p_k^{(j)}(0)}{j!}z^j\right]$$

在不包含 $f(z)$的极点的任何紧集上绝对且一致收敛，则在不包含 $f(z)$的极点的任何紧集上一致收敛地成立着

$$f(z)=\sum_{j=1}^{q}\frac{f^{(j)}(0)}{j!}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)-\sum_{j=0}^{q}\frac{p_n^{(j)}(0)}{j!}z^j\right]。 \tag{5-130}$$

例 5-3 将 $f(z)=\frac{1}{\sin z}-\frac{1}{z}$展开成部分分式。

解 由于 $\lim_{z\to 0}f(z)=0$，所以，$z=0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点，我们定义 $f(0)=0$，$z_n=n\pi(n=\pm1,\pm2,\cdots)$是 $f(z)$的一级极点。由于

$$\text{Res}(f,n\pi)=\left.\frac{z-\sin z}{(z\sin z)'}\right|_{z=n\pi}=(-1)^n,$$

所以

$$p_n(z)=P_n\left(\frac{1}{z-n\pi}\right)=\frac{(-1)^n}{z-n\pi},\quad n=\pm1,\pm2,\cdots。$$

取 γ_n为图 5.8 所示的正方形，它的边平行于坐标轴。显然，γ_n满足定理 3 中的条件。现在证明 $f(z)$ 在 γ_n 上是有界的。为此只要证

明
$$\frac{1}{\sin z}$$

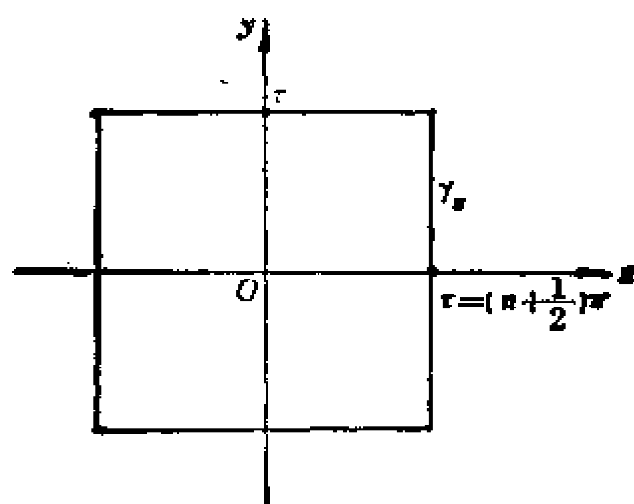


图 5.8

在 γ_n 上是有界的。

事实上，令 $z=x+iy$，则

$$\left|\frac{1}{\sin z}\right|^2=\frac{1}{\mathrm{sh}^2y+\sin^2x}$$

$$=\frac{2}{\mathrm{ch}2y-\cos 2x}.$$

在 γ_n 的平行于 y 轴的两边上，$\sin^2x=1$，因而

$$\left|\frac{1}{\sin z}\right|^2=\frac{1}{\mathrm{sh}^2y+1}\leqslant 1;$$

在 γ_n 的平行于 x 轴的两边上，有

$$\left|\frac{1}{\sin z}\right|^2=\frac{2}{\mathrm{ch}2y-1}=\frac{4}{e^{2y}+e^{-2y}-2},$$

其中 $y=\pm(2n+1)\pi/2$。当 $n\to+\infty$ 时，

$$\frac{4}{e^{2y}+e^{-2y}-2}\to 0。$$

所以 $1/\sin z$ 在 γ_n 上是有界的。因此，$f(z)$ 在 γ_n 上是有界的。若取 $q=0$，则 $f(z)$满足条件(5-123)。

注意到 $p_n(0)=(-1)^{n+1}/(n\pi)$，$n=\pm1,\pm2,\cdots$。由 (5-124) 式

得到

$$\frac{1}{\sin z}-\frac{1}{z}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=-n}^{n}{}'(-1)^k\left(\frac{1}{z-k\pi}+\frac{1}{k\pi}\right), \tag{5-131}$$

其中 $\sum'$ 表示 $k\neq0$。由于对任意的 $R>0$，当 $|z|<R$ 时，有

$$\left|(-1)^k\left(\frac{1}{z-k\pi}+\frac{1}{k\pi}\right)\right|=\left|\frac{z}{k\pi(z-k\pi)}\right|$$

$$\leqslant\frac{R}{\pi k^2\left(\pi-\frac{R}{k}\right)},$$

所以，$\sum_{-\infty}^{\infty}{}'(-1)^k\left(\frac{1}{z-k\pi}+\frac{1}{k\pi}\right)$ 绝对收敛，并且在不包含 $z_n=n\pi(n=\pm1,\pm2,\cdots)$ 的任何紧集上是一致收敛的。故有

$$\frac{1}{\sin z}-\frac{1}{z}=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'(-1)^k\left(\frac{1}{z-k\pi}+\frac{1}{k\pi}\right)。 \tag{5-132}$$

由于级数是绝对收敛的，所以可将 k 和 $-k$ 的对应项相加，于是，我们得到

$$\frac{1}{\sin z}-\frac{1}{z}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k 2z}{z^2-k^2\pi^2},$$

这就是我们所要求的展开式。因此

$$\frac{1}{\sin z}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2z}{z^2-n^2\pi^2}。 \tag{5-133}$$

将方程（5-132）的两边关于 z 求导数，并利用可逐项求导的性质，我们有

$$-\frac{\cos z}{\sin^2 z}+\frac{1}{z^2}=\sum_{-\infty}^{\infty}{}'(-1)^{k+1}\frac{1}{(z-k\pi)^2},$$

即

$$\frac{\cos z}{\sin^2 z}=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-n\pi)^2}。 \tag{5-134}$$

习　题

1．已知亚纯函数 $f(z)$ 在 $z=1,2,3,\cdots$ 有二级极点，且在点 $z=n$ 的邻域内劳朗展开式的主要部分为 $p_n(z)=n/(z-n)^2$，求 $f(z)$ 的一般形式。

2. 将函数

$$f(z)=\frac{1}{e^z-1}$$

展开为部分分式。

3. 将函数

$$\frac{1}{\cos z}, \quad \mathrm{tg} z$$

展开为部分分式。

4. 设函数$f(z)$是一整函数，它的零点$z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots$都是一级的，且$0<|z_1|\leqslant|z_2|\leqslant\cdots$，$\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=+\infty$。设闭若当曲线$\{\gamma_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$满足定理3中的有关条件，并且$f(z)$在γ_n上满足条件

$$\max_{z\in\gamma_n}\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|=o(d_n),$$

求证：

$$f(z)=f(0)e^{\frac{zf'(0)}{f(0)}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)e^{\frac{z}{z_n}}.$$

5. 证明：

$$\cos\frac{\pi z}{4}-\sin\frac{\pi z}{4}=(1-z)\left(1+\frac{z}{3}\right)\left(1-\frac{z}{5}\right)\cdots$$

（提示：注意等式$\cos\frac{\pi z}{4}-\sin\frac{\pi z}{4}=\sqrt{2}\sin\frac{(1-z)\pi}{4}$，并利用上题的结果）。

第六章　拉普拉斯变换及其应用

用算子方法去解常系数的常微分方程或类似的偏微分方程，其基本的想法是：开始先不去求微分方程的未知解 f，而是去求解 f 的某种变换的结果——函数 F，而变换的选择要使得求解函数 F 比求解 f 容易得多；求出了 F，再借助于逆变换去找到所要求的解 f，

在运算法里通常取拉普拉斯变换作为达到上述目的的变换。

§1　基本概念与方法

1.1　拉普拉斯变换

我们把满足下列条件的实变数 t 的任一复函数 $f(t)$，称为**原函数**：

(1) $f(t)$ 及其导数 $f'(t)$ 在整个 t 轴上，除了在个别的点之外是连续的；在那种个别点上，$f(t)$ 或 $f'(t)$ 有第一类间断点，且在 t 轴的每一个有限区间上，那种不连续点只有有限多个；

(2) 对于所有的负值 t，

$$f(t)=0;$$

(3) $f(t)$ 不比指数函数增长得快，即是说，存在常数 $M>0$ 和 $s_0\geqslant 0$，使得对所有的 t 都有

$$f(t)\leqslant Me^{s_0 t}。\tag{6-1}$$

数 s_0 称为 $f(t)$ 的**增长指数**。对于有界的原函数，显然可取 $s_0=0$。

从物理应用的观点来看，条件(1)和(3)对大多数用来描述物理过程的函数 $f(t)$（t 解释为时间）来说显然能被满足。条件(2)在外观上好像是人为的，可是应该注意到：运算法是适应于可归结到在始值条件下解微分方程的那些问题的，因而在开始的瞬间之前，如何处置所求的函数，在物理上没有差别；这开始瞬间自然可取为 $t=0$。因此，

条件(2)在物理上也是自然的。

单位函数

$$\eta(t)=\begin{cases}1, & t>0,\\ 0 & t<0\end{cases}$$

就是最简单的原函数。若函数$\varphi(t)$满足条件(1)和(3)，但不满足条件(2)，而乘积

$$f(t)=\eta(t)\varphi(t)=\begin{cases}\varphi(t), & t>0,\\ 0, & t<0\end{cases}$$

满足条件(2)，则它是个原函数。例如$\eta(t)\sin\omega t$，$\eta(t)t^n$，$\eta(t)e^{\lambda t}$，等等。为书写简单起见，我们将照例略去乘数$\eta(t)$，约定：所有我们将讨论的函数，对于负值的t都等于0[例如替代$\eta(t)$将写1，替代$\eta(t)\sin\omega t$只写$\sin\omega t$等等]。

由关系式

$$F(p)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A f(t)e^{-pt}dt \qquad (6\text{-}2)$$

所定义的复变数$p=s+i\sigma$的函数，叫做函数$f(t)$的**变像**或**像**（或**像函数**）。称(6-2)式为**拉普拉斯变换**，这里的积分是沿着正实半轴来取的。为简单计，“函数$f(t)$具有像$F(p)$”这话，我们记为

$$\mathscr{L}[f(t)]=F(p)。\qquad 或 F(p)=\mathscr{L}[f(t)]。$$

例 6-1 设$f(t)=1$，则当$s>0$时，有

$$\mathscr{L}[f(t)]=F(p)=\int_0^{\infty}e^{-pt}dt=-\frac{e^{-pt}}{p}\Bigg|_0^{\infty}=\frac{1}{p}, 即 \mathscr{L}1=\frac{1}{p}。$$

例 6-2 设$f(t)=t$，则当$s>0$时，有

$$\mathscr{L}[f(t)]=F(p)=\int_0^{\infty}te^{-pt}dt,$$

分部积分之，我们得到

$$F(p)=\frac{1}{p^2}, 即 \mathscr{L}t=\frac{1}{p^2}。$$

例 6-3 设$f(t)=t^n$，其中n为正整数，则当$s>0$时，分部积分n次，我们得到

$$\mathscr{L}[f(t)]=F(p)=\int_0^{\infty} t^n e^{-pt}dt=\frac{n!}{p^{n+1}}, \quad 即 \mathscr{L}t^n=\frac{n!}{p^{n+1}}。$$

例 6-4 设 $f(t)=e^{p_0 t}$，则

$$\mathscr{L}[f(t)]=F(p)=\int_0^{\infty} e^{-(p-p_0)t}dt,$$

当 $\mathrm{Re}p>\mathrm{Re}p_0$ 时，我们得到：

$$F(p)=-\frac{e^{-(p-p_0)t}}{p-p_0}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{p-p_0}, \quad 即 \mathscr{L}e^{p_0 t}=\frac{1}{p-p_0}。$$

上述定义的像函数 $F(p)$ 具有什么性质呢?我们来看下面的定理。

定理1 对于每个原函数 $f(t)$，其像函数 $F(p)$ 在半平面 $\mathrm{Re}p>s_0$ 上都是有定义的，其中 s_0 是 $f(t)$ 的增长指数；而且 $F(p)$ 在这右半平面上是解析的。

证明 实际上，当 $\mathrm{Re}p=s>s_0$ 时，由不等式 (6-1)，积分 (6-2) 不超过收敛的积分

$$\int_0^{\infty}|f(t)e^{-pt}|dt\leqslant\int_0^{\infty}Me^{-(s-s_0)t}dt=\frac{M}{s-s_0}, \tag{6-3}$$

故积分(6-2)是绝对收敛的，因而，$F(p)$ 在右半平面 $\mathrm{Re}p>s_0$ 上是有定义的。再者，在任意半平面 $\mathrm{Re}p\geqslant s_1>s_0$ 上，由于积分(6-2)对于 p 微分而得到的那个积分不超过一个与 p 无关的收敛积分，即

$$\left|\int_0^{\infty} f(t)te^{-pt}dt\right|\leqslant\int_0^{\infty}|f(t)\ te^{-pt}|dt\leqslant\int_0^{\infty}Mte^{-(s_1-s_0)t}dt$$

$$=\frac{M}{(s_1-s_0)^2}, \tag{6-4}$$

所以，积分 $\int_0^{\infty} f(t)te^{-pt}dt$ 是绝对收敛的，且

$$F'(p)=\int_0^{\infty}f(t)te^{-pt}dt。$$

这说明函数 $F(p)$ 在半平面 $\mathrm{Re}p>s_0$ 上的每一个点处都具有导数，故 $F(p)$ 在这半平面上是解析的。定理证毕。

从不等式(6-3)直接可以知道，若点 p 趋于无穷远，同时使得 $\mathrm{Re}p=s$ 无限制地增大，则 $F(p)$ 趋于 0，即

$$\lim_{s\to+\infty} F(p)=0。\tag{6-5}$$

于是可知，对任意小的$\delta>0$，若$p\to\infty$，且$-\frac{\pi}{2}+\delta\leqslant\arg p\leqslant\frac{\pi}{2}-\delta$，则$F(p)\to0$。这说明收敛是一致的。特别是，如果$F(p)$在无穷远点是解析的，则沿任意路线$p\to\infty$时，$F(p)\to0$；因此，$F(p)$在无穷远处只能是零点。

公式(6-2)表明，对于给定的一个原函数，可唯一地确定一个像函数，而且这像函数以公式(6-2)的形式用原函数来表示，反之，原函数$f(t)$是否可以用其像函数$F(p)$表示呢？为此，我们有定理2。

定理2 若$f(t)$是一原函数，而且其像函数为$F(p)$，则对$f(t)$的任一连续点t，有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{pt}F(p)dp \tag{6-6}$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ib}^{a+ib}e^{pt}F(p)dp,$$

其中积分路线是任一直线$\mathrm{Re}p=a>s_0$。

这定理表明，除了$f(t)$可能有的第一类不连续点以外，$f(t)$完全由它的像函数$F(p)$所确定。我们称积分公式(6-6)为拉普拉斯变换(6-2)的逆变换，记成$f(t)=\mathscr{L}^{-1}F(p)$。

证明 设

$$f_b(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ib}^{a+ib}e^{pt}F(p)dp。$$

我们只要证明

$$\lim_{b\to+\infty}f_b(t)=f(t)。$$

由公式(6-2)和积分$\int_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau}d\tau$对于$p$是一致收敛的，故可改变积分的顺序，因而，我们有

$$f_b(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ib}^{a+ib}e^{pt}\left\{\int_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau}d\tau\right\}dp$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty f(\tau)\left\{\int_{a-ib}^{a+ib}e^{p(t-\tau)}dp\right\}d\tau$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(\tau)e^{a(t-\tau)}\frac{\sin b(t-\tau)}{t-\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-t}^\infty g(\xi)\frac{\sin b\xi}{\xi}\mathrm{d}\xi, \tag{6-7}$$

其中$\xi=\tau-t$，$g(\xi)=e^{-a\xi}f(\xi+t)$，可见$\xi=0$是(6-7)式中积分号下函数的奇异点。我们把积分(6-7)分解成两个：从$-t$到0与从0到∞。由于t是$f(t)$的连续点，故当$\xi\to 0$时，$\lim g(\xi)=g(0)=f(t)$存在，我们有

$$\int_0^\infty g(\xi)\frac{\sin b\xi}{\xi}\mathrm{d}\xi=g(0)\int_0^r\frac{\sin b\xi}{\xi}\mathrm{d}\xi+\int_0^r[g(\xi)-g(0)]\frac{\sin b\xi}{\xi}\mathrm{d}\xi$$

$$+\int_r^R g(\xi)\frac{\sin b\xi}{\xi}\mathrm{d}\xi+\int_R^\infty g(\xi)\frac{\sin b\xi}{\xi}\mathrm{d}\xi。$$

由相应积分的收敛性，可以适当地选取充分小的r与充分大的R，使第二项与第四项的模对于所有的b都小于任意预先给定的数。对于第三项，分部求积分后，得到

$$\int_r^R g(\xi)\frac{\sin b\xi}{\xi}\mathrm{d}\xi=\left[-\frac{\cos b\xi}{b\xi}g(\xi)\right]_{\xi=r}^R$$

$$+\frac{1}{b}\int_r^R\cos b\xi\left(\frac{g(\xi)}{\xi}\right)'\mathrm{d}\xi,$$

由此可见，当固定r与R，而使$b\to+\infty$时，这项就趋于0。

最后，令$b\xi=\eta$，得

$$\int_0^r\frac{\sin b\xi}{\xi}\mathrm{d}\xi=\int_0^{br}\frac{\sin\eta}{\eta}\mathrm{d}\eta,$$

于是可见，当固定r，而使$b\to+\infty$时，这积分趋于$\frac{\pi}{2}$。因此，我们有

$$\lim_{b\to+\infty}\int_0^\infty g(\xi)\frac{\sin b\xi}{\xi}\mathrm{d}\xi=\frac{\pi}{2}g(0)=\frac{\pi}{2}f(t)。$$

用同样的方法，我们得到

$$\lim_{b\to+\infty}\int_{-t}^0 g(\xi)\frac{\sin b\xi}{\xi}\mathrm{d}\xi=\frac{\pi}{2}f(t)。$$

因此， $\lim\limits_{b\to+\infty} f_b(t)=f(t)$。 定理证完。

自然我们要问：什么样的复变函数 $F(p)$ 是某一个原函数的像呢？下面给一充分条件。

定理 3 如果函数 $F(p)$ 在半平面 $\mathrm{Re}p>s_0\geqslant 0$ 上解析，在任意半平面 $\mathrm{Re}p\geqslant a>s_0$ 上当 $|p|\to\infty$ 时对于 $\arg p$ 一致地趋于 0，且积分

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)\mathrm{d}p$$

绝对收敛，则 $F(p)$ 是函数

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}F(p)\mathrm{d}p$$

的像。

证明 首先，我们证明 $f(t)$ 是一个原函数。

设圆弧 $C'_R=\{p:|p|=R,\mathrm{Re}p>a\}$。由定理中的条件，函数 $F(p)$ 当 $R\to+\infty$ 时在圆弧 C'_R 上关于 $\arg p$ 一致地收敛于零，据变形的若当引理，则对任何负数 t，有

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C'_R} e^{pt}F(p)\mathrm{d}p=0。$$

令 $\widetilde{C}_R$ 是由 C'_R 与直线段 $(a-ib,\ a+ib)$ 所组成的闭围道，于是，当 $t<0$ 时，我们有

$$f(t)=\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\widetilde{C}_R} e^{pt}F(p)\mathrm{d}p。$$

因为被积函数在 $\widetilde{C}_R$ 内是解析的，所以 $f(t)=0$。故 $f(t)$ 满足原函数的条件(2)。其次，由(6-6)式有

$$|f(t)|\leqslant\frac{1}{2\pi}e^{at}\int_{-\infty}^{\infty}|F(a+i\sigma)|\mathrm{d}\sigma=Me^{at}。$$

因此，$f(t)$ 满足原函数的条件(3)。我们将不详细叙述条件(1)的检验。

现在，我们证明函数 $F(p)$ 是上述函数 $f(t)$ 的像。为此，我们只要证明：对任意给定的复数 p_0，若 $\mathrm{Re}p_0>a$，有

$$\int_0^\infty e^{-p_0t}f(t)\mathrm{d}t=F(p_0)$$

由(6-6)即得

$$\int_0^\infty e^{-p_0 t} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty e^{-p_0 t}\left\{\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}F(p)\mathrm{d}p\right\}\mathrm{d}t。\tag{6-8}$$

由于 $p=a+i\sigma$，$\mathrm{d}p=i\mathrm{d}\sigma$，因此在上式内部的积分中可以将因子 e^{at} 拿到积分号的外面，而留下的积分为

$$\left|\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{i\sigma t}F(p)\mathrm{d}p\right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}|F(a+i\sigma)|\mathrm{d}\sigma。$$

由此可见，这个积分对于 t 来说是一致收敛的，因此在公式中可交换积分的顺序，则我们有

$$\int_0^\infty e^{-p_0 t} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)\left\{\int_0^\infty e^{(p-p_0)t}\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}p$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{F(p)}{p-p_0}\mathrm{d}p,\tag{6-9}$$

因为，由于 $\mathrm{Re}(p-p_0)<0$ 且 $t>0$，内部的积分收敛。设 $M_R=\max\limits_{p\in C'_R}|F(p)|$，如前所述，当 $R\to\infty$ 时 $M_R\to 0$。于是，当 $R\to+\infty$ 时，我们有

$$\left|\int_{C'_R}\frac{F(p)}{p-p_0}\mathrm{d}p\right| \leqslant \frac{M_R}{R-|p_0|}\pi R \longrightarrow 0。$$

于是可知，(6-9)式中的积分直线可用闭围道 $\widetilde{C}_R$ 来代替，即

$$\int_0^\infty e^{-p_0 t} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\widetilde{C}_R}\frac{F(p)}{p-p_0}\mathrm{d}p。$$

由于函数 $F(p)$ 在 $\widetilde{C}_R$ 内是解析的，故由柯西公式，即得

$$\int_0^\infty e^{-p_0 t} f(t)\mathrm{d}t = F(p_0)。$$

这正是所要证明的。定理证毕。

1.2 拉普拉斯变换的性质

在此，我们将举出一系列的简单命题，它们构成了运算法的工具。以后，我们将处处用 $f(t)$，$g(t)$，…来代表原函数，而用 $F(p)$，$G(p)$，…代表它们相应的像函数，即

$$F(p)=\int_0^{\infty}e^{-pt}f(t)dt, \quad G(p)=\int_0^{\infty}e^{-pt}g(t)dt, \cdots。$$

直接从积分的性质我们可得到拉普拉斯变换下列一些性质：

（1）**线性性质** 对任何两个复数 α 与 β，有

$$\mathscr{L}[\alpha f(t)+\beta g(t)]=\alpha F(p)+\beta G(p)。\tag{6-10}$$

根据这个性质，和前面例 6-4 的结果：$\mathscr{L}e^{p_0t}=1/(p-p_0)$，立即得到关系式

$$\mathscr{L}[\sin\omega t]=\mathscr{L}\left[\frac{1}{2i}(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t})\right]=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega}-\frac{1}{p+i\omega}\right)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}。\tag{6-11}$$

类似地有

$$\mathscr{L}[\cos\omega t]=\frac{p}{p^2+\omega^2}, \quad \mathscr{L}[\text{sh}\omega t]=\frac{\omega}{p^2-\omega^2},$$

$$\mathscr{L}[\text{ch}\omega t]=\frac{p}{p^2-\omega^2}。\tag{6-12}$$

（2）**相似定理** 对于任一常数 a，有

$$\mathscr{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)。\tag{6-13}$$

事实上，令 $at=\tau$，有

$$\mathscr{L}[f(at)]=\int_0^{\infty}f(at)e^{-pt}dt=\frac{1}{a}\int_0^{\infty}f(\tau)e^{-\frac{p}{a}\tau}da=\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)。$$

（3）**原函数的微分法** 若 $f'(t)$，或更一般地，$f^{(n)}(t)$ 是原函数，则

$$\mathscr{L}[f'(t)]=pF(p)-f(0),\tag{6-14}$$

或

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)]=p^n\left\{F(p)-\frac{f(0)}{p}-\frac{f'(0)}{p^2}-\cdots-\frac{f^{(n-1)}(0)}{p^n}\right\},\tag{6-15}$$

其中 $f^{(k)}(0)$ 理解为右极限值 $\lim\limits_{t\to+0}f^{(k)}(t)$。

证明 实际上，用分部积分法，有

$$\mathscr{L}[f'(t)]=\int_0^{\infty} f'(t)e^{-pt}dt=[f(t)e^{-pt}]_0^{\infty}+p\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt。$$

由于 $f(t)$ 是原函数且 $\mathrm{Re}p=s>s_0$，以及 $|f(t)e^{-pt}|\leqslant Me^{-(s-s_0)t}$，因而 $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)e^{-pt}=0$。显然，第二项等于 $pF(p)$，故公式(6-14)成立。应用公式(6-14)两次，便有

$$\mathscr{L}[f''(t)]=\mathscr{L}[f'(t)]'=p[pF(p)-f(0)]-f'(0)$$

$$=p^2\left[F(p)-\frac{f(0)}{p}-\frac{f'(0)}{p^2}\right],$$

如此推导下去，即得公式(6-15)。

特别是，若 $f(0)=0$，则

$$\mathscr{L}[f'(t)]=pF(p)。\tag{6-16}$$

因而，原函数的微分法归结为用 p 来乘它的像函数。若 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$，则

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)]=p^nF(p)。\tag{6-17}$$

(4) **像函数的微分法** 像函数的微分法可归结为用 $-t$ 来乘原函数的乘法，或者，更一般地，有

$$F^{(n)}(p)=\mathscr{L}[(-1)^n t^n f(t)]。\tag{6-18}$$

证明 事实上，由于 $F(p)$ 在半平面 $\mathrm{Re}p>s_0$ 上是解析的，因而它可以对 p 求导，而且积分与求导可交换次序，于是，我们有

$$F'(p)=-\int_0^{\infty} tf(t)e^{-pt}dt,\quad F''(p)=\int_0^{\infty} t^2f(t)e^{-pt}dt,$$

$$\cdots,\quad F^{(n)}(p)=(-1)^n\int_0^{\infty} t^nf(t)e^{-pt}dt。$$

根据这一性质，由例 6-1 和例 6-4 的结果，即得

$$\mathscr{L}[t^n]=\frac{n!}{p^{n+1}},\qquad \mathscr{L}[t^ne^{p_0t}]=\frac{n!}{(p-p_0)^{n+1}}。\tag{6-19}$$

而从公式(6-11)和(6-12)有

$$\mathscr{L}[t\sin\omega t]=\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2},\qquad \mathscr{L}[t\cos\omega t]=\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}。\tag{6-20}$$

(5) **原函数的积分法** 原函数的积分法归结为用 p 除它的像函

数，即

$$\mathscr{L}\left(\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right)=\frac{F(p)}{p}。\qquad(6-21)$$

证明 容易验证，函数$g(t)=\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$也是原函数，即它满足原函数的条件(1)，(2)和(3)。于是由公式(6-16)有

$$\mathscr{L}[f(t)]=\mathscr{L}[g'(t)]=pG(p),$$

即 $F(p)=pG(p)$。由此，即得所要证的

$$G(p)=\frac{F(p)}{p}。$$

(6) **像函数的积分法** 若积分$\int_p^\infty F(p)\mathrm{d}p$收敛，则它可视为函数$f(t)/t$的像函数，即

$$\mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_p^\infty F(p)\mathrm{d}p\qquad(6-22)$$

(变像的积分法，相当于用t来除原函数的除法)。

证明 事实上，我们有

$$\int_p^\infty F(p)\mathrm{d}p=\int_p^\infty \mathrm{d}p\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t。$$

假定积分路线(p,∞)全部位于半平面$\mathrm{Re}p\geqslant a>s_0$上，我们对内部积分有下述估计

$$\left|\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t\right|\leqslant M\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(a-s_0)t}\mathrm{d}t,$$

由此可见，对于p来说，它是一致收敛的。这样，我们可变换积分的次序，得到

$$\int_p^\infty F(p)\mathrm{d}p=\int_0^\infty f(t)\mathrm{d}t\int_p^\infty \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}p=\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$

$$=\mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]。$$

这就是所要证明的。

下面我们来看一些例子。

例 6-5 我们知道，

$$\mathscr{L}[e^{bt}-e^{at}]=\frac{1}{p-b}-\frac{1}{p-a}。$$

根据性质(6)，则得

$$\mathscr{L}\left[\frac{e^{bt}-e^{at}}{t}\right]=\int_p^{\infty}\left(\frac{1}{p-b}-\frac{1}{p-a}\right)dp=\ln\frac{p-a}{p-b}。\qquad(6\text{-}23)$$

例 6-6 从公式(6-11)，应用性质(6)，即得

$$\mathscr{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right]=\int_p^{\infty}\frac{1}{1+p^2}dp=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}p。$$

应用性质 (5)，便可求得正弦积分的像为

$$\mathscr{L}\left[\operatorname{si}t=\int_0^t\frac{\sin\tau}{\tau}dt\right]=\frac{\pi}{2p}-\frac{\operatorname{arctg}p}{p}。\qquad(6\text{-}24)$$

(7) **延迟定理** 对于任一正数 τ，有

$$\mathscr{L}[f(t-\tau)]=e^{-p\tau}F(p)。\quad(6\text{-}25)$$

这表明原函数延迟 τ，相当于其像函数乘以因子 $e^{-p\tau}$，见图 6.1。

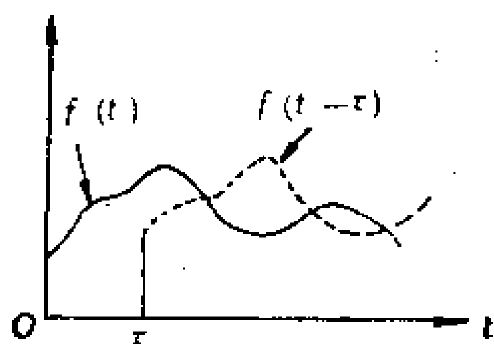


图 6.1

证明 因为当 $t<\tau$ 时，$f(t-\tau)=0$，故作变数代换 $t-\tau=t_1$ 后，便得

$$\mathscr{L}[f(t-\tau)]=\int_\tau^{\infty}f(t-\tau)e^{-pt}dt=\int_0^{\infty}f(t_1)e^{-p(t_1+\tau)}dt_1$$
$$=e^{-p\tau}F(p)。$$

这正是所要证明的。

延迟定理在实际问题中非常有用。例如对于理想流体管路，当终端是盲端或全敞开时，几乎全部可以用延迟定理来讨论其传输特性。

例 6-7 如图 6.2 所示，如原函数为阶梯函数

$$f(t)=A[\eta(t)+\eta(t-\tau)+\eta(t-2\tau)+\cdots]，$$

则根据延迟定理，有

$$\mathscr{L}[f(t)]=A\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p}e^{-p\tau}+\frac{1}{p}e^{-2p\tau}+\cdots\right)。$$

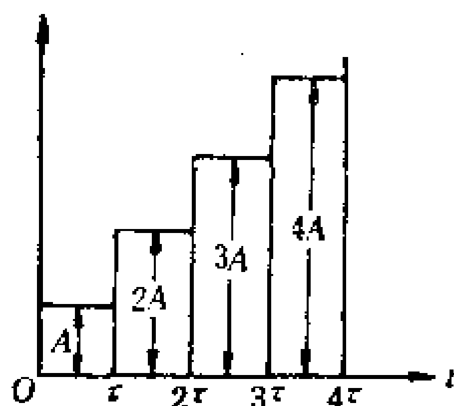


图 6.2

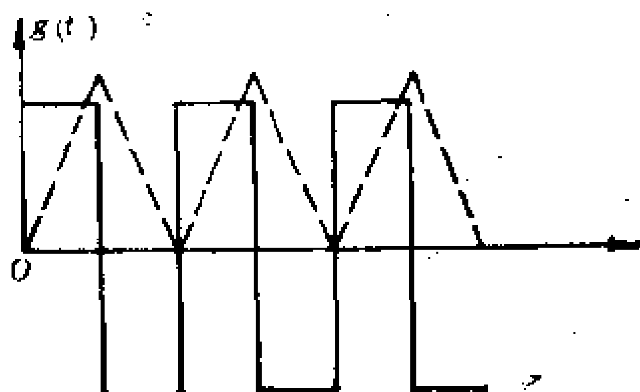


图 6.3

因为$|e^{-p\tau}|=e^{-s\tau}<1$，右边是收敛的几何级数，所以

$$\mathscr{L}[f(t)]=\frac{A}{p}\cdot\frac{1}{1-e^{-p\tau}}=\frac{A}{2p}\left(1+\operatorname{cth}\frac{p\tau}{2}\right)。\tag{6-26}$$

例 6-8 如图 6.3 所示，如原函数 $g(t)$是周期性的矩形脉冲

$$g(t)=A\{\eta(t)-2\eta(t-\tau)+2\eta(t-2\tau)-\cdots\}$$

则根据延迟定理，有

$$\mathscr{L}[g(t)]=A\left\{\frac{1}{p}-\frac{2}{p}e^{-p\tau}+\frac{2}{p}e^{-2p\tau}-\cdots\right\}$$

$$=\frac{A}{p}\left(1-2\frac{e^{-p\tau}}{1+e^{-p\tau}}\right)=\frac{A}{p}\operatorname{th}\frac{p\tau}{2}。\tag{6-27}$$

周期性的三角形脉冲函数 $h(t)$，其图像如图 6.3 中用虚线表出，等于$\int_0^t g(t)\mathrm{d}t$，因此根据性质(5)得

$$\mathscr{L}[h(t)]=\frac{A}{p^2}\operatorname{th}\frac{p\tau}{2}。\tag{6-28}$$

(8) **位移定理** 对于任一复数 p_0，有

$$\mathscr{L}[e^{p_0t}f(t)]=F(p-p_0)。\tag{6-29}$$

这表明，对像函数作“位移” p_0，相当于用 e^{p_0t} 乘原函数。

证明 根据定义有

$$\mathscr{L}[e^{p_0t}f(t)]=\int_0^\infty e^{-(p-p_0)t}f(t)\mathrm{d}t=F(p-p_0)。$$

这定理能使我们从原函数的像函数，求得原函数乘以指数函数后的像函数。例如

$$\mathscr{L}[e^{-\lambda t}\sin\omega t]=\frac{\omega}{(p+\lambda)^2+\omega^2},\quad \mathscr{L}[e^{-\lambda t}\cos\omega t]=\frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+\omega^2},$$

$$\mathscr{L}[e^{-\lambda t}t^n]=\frac{n!}{(p+\lambda)^{n+1}}。\tag{6-30}$$

1.3 乘法定理

乘法定理是表达原函数乘积的原函数与像函数之间的联系，或像函数乘积的像函数与原函数之间的联系定理。

像函数乘法定理 两个像函数 $F(p)$ 与 $G(p)$ 的乘积也是像函数，并且

$$F(p)\cdot G(p)=\mathscr{L}\left[\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]。\tag{6-31}$$

这表明：像函数的乘积，相当于原函数的卷积，即

$$\mathscr{L}[f*g]=F(p)\cdot G(p),\tag{6-31'}$$

其中 $(f*g)$ 表示 f 与 g 的卷积，即

$$(f*g)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau。\tag{6-32}$$

证明 首先我们来证明(6-31)式的右端的积分，即原函数的卷积是个原函数：条件(1)与(2)很明显；要证明条件(3)，取 s_0 等于 $f(t)$ 与 $g(t)$ 的增长指数中的较大者，则

$$\left|\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right|\leqslant M\int_0^t e^{s_0\tau}e^{s_0(t-\tau)}\mathrm{d}\tau$$

$$=Mte^{s_0t}。$$

于是，积分(6-30)不超过某一个常数乘以 $e^{(s_0+\varepsilon)t}$，其中 ε 是任意小的正数。这说明原函数的卷积是个原函数。

下面证明卷积 $(f*g)$ 的像就是像函数的乘积 $F(p)G(p)$。根据定义得

$$\mathscr{L}[f*g]=\int_0^\infty e^{-pt}\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right\}\mathrm{d}t。$$

我们知道，上式右端是一个二重积分，其积分区域是 (t,τ) 平面上的

角形区域 $D=\{(t,\tau): 0\leqslant t<\infty, 0\leqslant\tau\leqslant t\}$，如图 6.4 所示。

设 f 与 g 的增长指数分别为 s_f 与 s_g，如前所述，$(f*g)$的增长指

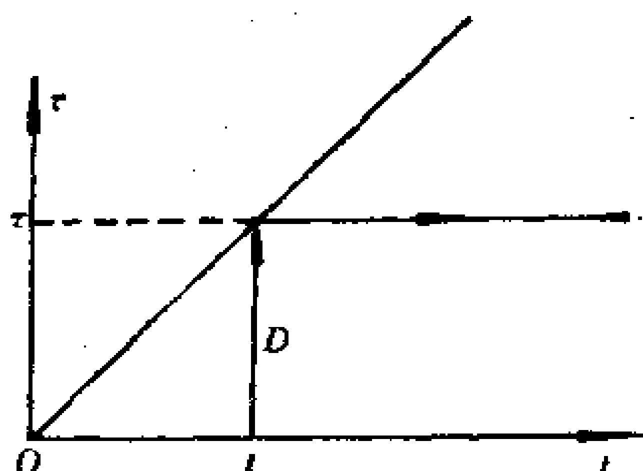


图 6.4

数 $s_c=\max(s_f,s_g)$。由于当 $\mathrm{Re}p=s>s_0$ 时，不难证明这二重积分绝对收敛，因此可以交换积分次序，则得

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f*g]&=\int_0^\infty f(\tau)\mathrm{d}\tau\int_\tau^\infty \mathrm{e}^{-pt}g(t-\tau)\mathrm{d}t\\&=\int_0^\infty f(\tau)\mathrm{e}^{-p\tau}\mathrm{d}\tau\int_0^\infty g(t_1)\mathrm{e}^{-pt_1}\mathrm{d}t_1\\&=F(p)G(p)。\end{aligned}$$

这正是所要证明的。

在应用时，乘积定理的下述推论很有用。

推论 1

$$\begin{aligned}pF(p)G(p)&=\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right\}\right]\\&=\mathscr{L}\left[f(t)g(0)+\int_0^t f(\tau)g'(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]。\quad(6\text{-}33)\end{aligned}$$

原函数乘积定理 设 $f(t)$ 与 $g(t)$ 是两个原函数，其增长指数分别为 s_1 与 s_2，则它们的乘积也是个原函数，并且

$$\mathscr{L}[f(t)g(t)]=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty}F(q)G(p-q)\mathrm{d}q,\qquad(6\text{-}34)$$

其中 $a>s_1$，且 $\mathrm{Re}p>s_2+a$。

证明 乘积 $f(t)g(t)$ 显然是个原函数，因它满足原函数的条件(1)—(3)。它的像是

$$\mathscr{L}[f(t)g(t)]=\int_0^{\infty}f(t)g(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t。$$

取 $a>s_1$，将 $f(t)$ 的反演公式(6-6)代入上式右端，即得

$$\mathscr{L}[f(t)g(t)]=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{\infty}\left\{\int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty}F(q)\mathrm{e}^{qt}\mathrm{d}q\right\}g(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty}\left\{F(q)\int_0^{\infty}g(t)\mathrm{e}^{-(p-q)t}\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}q。$$

这是由于上述二重积分绝对收敛，故可交换积分次序。又设 $\mathrm{Re}p>s_2+a$，因为 $\mathrm{Re}q=a$，则 $\mathrm{Re}(p-q)>s_2$；所以内部积分可用 $G(p-q)$ 来代替。定理证毕。

1.4 展开定理

在此，我们将证明某些关于展开原函数或像函数为级数的定理。

第一展开定理 如果 $F(p)$ 在无穷远点处是解析的，且在它的邻域内有劳朗展开式

$$F(p)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{p^k},\tag{6-35}$$

则 $F(p)$ 的原函数是（乘以 $\eta(t)$ 的）函数

$$f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{(k-1)!}t^{k-1}。\tag{6-36}$$

这时，$f(t)$ 是一个整函数。

证明 若(6-36)式所确定的 $f(t)$ 是一个整函数，那么它在整个平面上是一致收敛的，因此，交换积分与求和的次序，并利用 $\mathscr{L}[t^n]=n!/p^{n+1}$，我们有

$$\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{(k-1)!}\int_0^{\infty}t^{k-1}\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{p^k}。$$

故 $f(t)$ 的像函数是 $F(p)$。

因此，我们只要证明 $f(t)$ 是一个整函数。为此，令 $q=\frac{1}{p}$，且 $\Phi(q)=F\left(\frac{1}{q}\right)$。由于 $F(p)$ 在无穷远点的邻域内是解析的，则函数 $\Phi(q)=\Sigma c_k q^k$ 在圆域 $|q|\leqslant\frac{1}{R}$ 内是解析的；因此由柯西不等式，便有

$$|c_k|\leqslant MR^k,\ k=1,\ 2,3,\cdots。$$

于是，对任何复数 t，有

$$|f(t)|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|\ \frac{|t|^{k-1}}{(k-1)!}\leqslant M\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(R|t|)^k}{k!}=Me^{R|t|}。$$

由此可见，级数(6-36)对所有的 t 都收敛，故它是一个整函数；而且，对于所有的正值 t，$|f(t)|<Me^{Rt}$，故它是一个原函数。定理证毕。

例 6-9 试求

$$F(p)=\frac{1}{p^{n+1}}e^{-\frac{1}{p}}$$

的原函数。

解 考虑展开式

$$F(p)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{p^{n+k+1}}。$$

由于 $F(p)$ 在无穷远处是解析的，求 $F(\infty)=0$，根据第一展开定理，则得

$$\mathscr{L}^{-1}[F(p)]=\frac{1}{p^{n+1}}e^{-\frac{t}{p}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\frac{t^{n+k}}{(n+k)!}=f(t)。\tag{6-37}$$

这正是所要求的原函数。

第二展开定理 如果函数 $F(p)$ 具有下述性质：

(1) $F(p)$ 在某一右半平面 $\mathrm{Re}p>s_0$ 上是解析的，而在全平面上是半纯函数（即是两个整函数之比）；

(2) 存在圆周族 C_n：$|p|=R_n$，$R_1<R_2<\cdots<R_n<\cdots$，$R_n\to\infty$，在这族圆周上，$F(p)$ 与 $\arg p$ 无关地收敛于 0；

(3) 对任何 $a>s_0$，积分 $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)\mathrm{d}p$ 绝对收敛。

则其原函数 $f(t)$（除掉因子 $\eta(t)$ 外）可表示成：

$$f(t)=\sum_{p_k}\mathrm{Res}(F(p)\mathrm{e}^{pt}, p_k) \tag{6-38}$$

其中，留数和是对所有 $F(p)$ 的孤立奇点 p_k 来取的，它们按其模的不减次序排列。

证明 根据前面的定理 2，函数 $F(p)$ 是原函数

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty} F(p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p$$

的像，其中 $a>s_0$。

设圆周 C_n 与直线 $\mathrm{Re}p=a$ 的交点为 $a\pm ib_n$，位于直线 $\mathrm{Re}p=a$ 左侧的圆周为 C_n'；又设 Γ_n 表示由圆弧 C_n' 与直线段 $(a-\mathrm{i}b_n, a+\mathrm{i}b_n)$ 所组成的闭围道。

由条件(2)可知，$F(p)$ 在 C_n' 上与 $\arg p$ 无关地收敛于 0，根据变形的若当引理，则对于任何的 $t>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{C_n'} F(p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p=0。$$

于是，对任何的 $t>0$，有

$$f(t)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\Gamma_n} F(p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p。$$

但是，根据留数定理，则得

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\Gamma_n} F(p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p=\sum_{p_k}\mathrm{Res}(F(p)\mathrm{e}^{pt}, p_k),$$

其中，p_k 是 $F(p)$ 位于 Γ_n 内的所有孤立奇点。故公式(6-38)是真实的。

第二展开定理是很有用的。根据这个定理，我们有下述推论。

推论 2 如果像函数 $F(p)$ 是一个有理函数，即 $F(p)=\dfrac{A(p)}{B(p)}$，$A(p)$ 的次数低于 $B(p)$ 的次数，又若分母 $B(p)$ 的根 $p_0, p_1, \cdots, p_n$ 都是一阶零点。则其原函数可按下述公式求出：

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{A(p)}{B(p)}\right]=f(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}\mathrm{e}^{p_k t}。 \tag{6-39}$$

推论 3 如果像函数是一个有理函数$F(p)=\dfrac{A(p)}{B(p)}$，$A(p)$ 的次数低于 $B(p)$的次数，又若 $F(p)$具有任何阶 $n_k(k=0, 1, \cdots, n)$的极点 p_k，则其原函数可按下述公式求出：

$$f(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}}\{F(p)e^{pt}\}。\tag{6-40}$$

第二展开定理的应用，我们将在以后给出。

1.5 补充

极限关系定理 对任一原函数 $f(t)$与其像 $F(p)$，如果右极限 $\lim\limits_{t\to+0}f(t)=f(0)$存在，则

$$f(0)=\lim_{p\to\infty}pF(p)；\tag{6-41}$$

如果极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=f(\infty)$存在，则

$$f(\infty)=\lim_{p\to 0}pF(p)。\tag{6-42}$$

分别称(6-41)式和(6-42)式为**初值定理**和**终值定理**

证明 对任一实数 a, 设

$$F_a(p)=\int_0^{\infty}f(at)e^{-pt}dt=\mathscr{L}[f(at)]。$$

如果极限 $\lim\limits_{t\to 0}f(t)=f(0)$存在，则

$$F_0(p)=\int_0^{\infty}f(0)e^{-pt}dt=\frac{f(0)}{p}。$$

且不难证明

$$\lim_{a\to+0}F_a(p)=F_0(p)。\tag{6-43}$$

事实上，下式成立

$$F_a(p)-F_0(p)=\int_0^{T}[f(at)-f(0)]e^{-pt}dt+\int_T^{\infty}[f(at)-f(0)]e^{-pt}dt，$$

由原函数的条件(3)，我们有

$$\left|\int_T^{\infty}[f(at)-f(0)]e^{-pt}dt\right|\leqslant M\int_T^{\infty}e^{-(s-as_0)t}dt+|f(0)|\int_T^{\infty}e^{-st}dt$$

$$\cdots \frac{\cdots}{s-\alpha s_0} \cdots |f(0)| \cdots \frac{\cdots}{s}$$

$$<(M+|f(0)|)\frac{e^{-(s-\alpha s_0)\tau}}{s-\alpha s_0},$$

其中 $\mathrm{Re}p=s>s_0$。于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，能选取适当大的 τ，使得

$$(M+|f(0)|)\frac{e^{-(s-\alpha s_0)\tau}}{s-\alpha s_0}<\varepsilon。$$

固定 τ。由于极限 $\lim\limits_{t\to+0}f(t)=f(0)$存在，则不难证明存在正数 δ，使得当 $0\leqslant\alpha<\delta$ 时，有

$$\left|\int_0^{\tau}[f(\alpha t)-f(0)]e^{-pt}dt\right|<\varepsilon。$$

于是，当 $0\leqslant\alpha<\delta$ 时，有

$$|F_\alpha(p)-F_0(p)|<2\varepsilon。$$

故(6-43)式成立，即

$$\lim_{\alpha\to 0}F_\alpha(p)=\frac{f(0)}{p}。$$

但是，据相似定理，有 $F_\alpha(p)=\dfrac{1}{\alpha}F\left(\dfrac{p}{\alpha}\right)$。因此，关系式(6-43)可写成

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{p}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right)=f(0)。$$

由于当固定 p 且当 $\alpha\to 0$ 时，$\dfrac{p}{\alpha}\to\infty$，故可得到我们所要求的关系式(6-41)。

关系式(6-42)亦可以类似地证明。事实上，我们可类似地证明：

$$\lim_{\alpha\to\infty}F_\alpha(p)=F_\infty(p)=\frac{f(\infty)}{p}, \tag{6-44}$$

即

$$\lim_{\alpha\to\infty}\frac{p}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right)=f(\infty)。$$

故对固定的 p 且当 $\alpha\to\infty$ 时，$\frac{p}{\alpha}\to 0$，从而有

$$\lim_{p\to 0} pF(p)=f(\infty)。$$

当 $\alpha\to\infty$时，对任给 $\varepsilon>0$，首先可选取 τ 充分小，使得

$$\left|\int_0^\tau [f(\alpha t)-f(\infty)]e^{-pt}dt\right|<\varepsilon。$$

然后，固定这样的 τ，由于 $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=f(\infty)$，可选取充分大的 α，使得对一切充分大的 α，有

$$\left|\int_\tau^\infty [f(\alpha t)-f(\infty)]e^{-pt}dt\right|<\varepsilon。$$

因此，当 α 充分大时，有

$$\left|\int_0^\infty [f(\alpha t)-f(\infty)]e^{-pt}dt\right|<2\varepsilon。$$

故关系式(6-44)成立。定理证毕。

关系式(6-41)与(6-42)对于核对利用运算法的计算是很有用的。例如，由(6-30)式，当 $\lambda>0$ 时，我们得到

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-\lambda t}\sin\omega t=\lim_{p\to 0}\frac{p\omega}{(p+\lambda)^2+\omega^2}=0;$$

从(6-24)式得到

$$\mathrm{si}0=\lim_{p\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{arc\,tg}\,p\right)=0;$$

从(6-26)式得到

$$f(0)=\lim_{p\to\infty}\frac{A}{2}\left(1+\mathrm{cth}\frac{p\tau}{2}\right)=A。$$

脉冲函数的像 设 $\delta(t)$是脉冲函数，又称其为狄拉克函数，它除了在点 $t=0$ 处等于∞之外，到处都等于 0，但是

$$\int_{-\infty}^\infty \delta(t)dt=1。$$

则我们有

$$\mathscr{L}[\delta(t)]=1。\tag{6-45}$$

证明 事实上，考虑函数

$$\delta_h(t)=\begin{cases}0, & \text{当 } t<0,\ \text{或 } t>h \text{ 时},\\ \dfrac{1}{h}, & \text{当 } 0<t<h \text{ 时}。\end{cases}$$

它的图像如图 6.5 所示。这函数代表一个作用在区间$(0,h)$上的量，它具有常数值$\frac{1}{h}$，它的作用的总和等于

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta_h(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^h\delta_h(t)\mathrm{d}t=1。$$

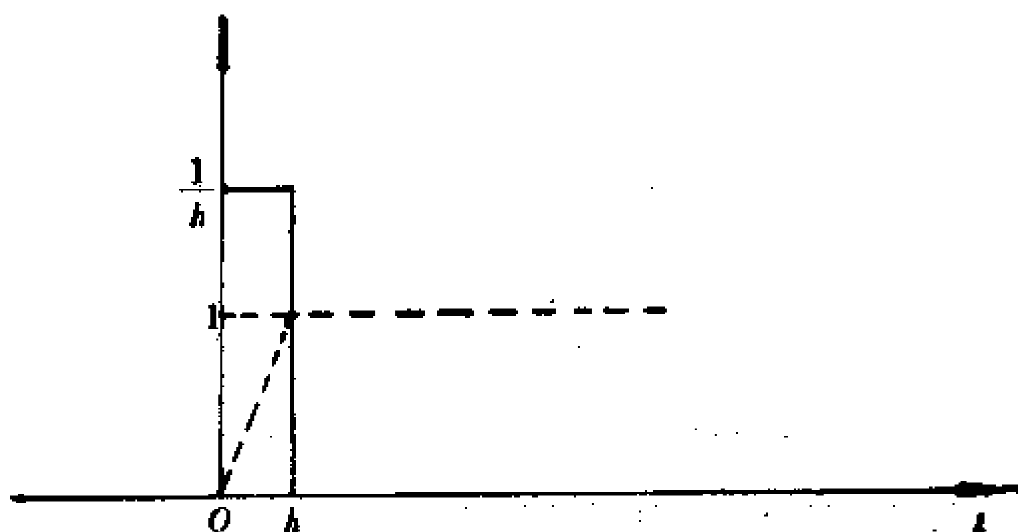


图 6.5

显然，当 $h\to0$ 时，函数族是发散的，但是，我们定义这族函数的极限为

$$\delta(t)=\lim_{h\to0}\delta_h(t),$$

并且称它为**脉冲函数**，它除了在点 $t=0$ 处等于∞之外，到处都等于 0，并且我们假设关系式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1$$

仍然成立。

我们还假设 δ 函数的变像是函数 $\delta_h(t)=\frac{1}{h}[\eta(t)-\eta(t-h)]$ 的变像的极限。根据延迟定理，$\delta_h(t)$的变像等于

$$\mathscr{L}[\delta_h(t)]=\frac{1-\mathrm{e}^{-ph}}{ph}。$$

令 $h\to 0$，便得到

$$\mathscr{L}[\delta(t)]=\lim_{h\to 0}\frac{1-e^{-ph}}{ph}=1。$$

我们还将用下面的“论证”来说明其“合理性”。在图 6.5 中，虚线表示函数 $\delta_h(t)$ 的积分

$$\eta_h(t)=\int_0^t \delta_h(t)\mathrm{d}t。$$

从这个图像看出：当 $h\to 0$ 时，函数 $\eta_h(t)$ 趋于单位函数 $\eta(t)$。因此，我们置

$$\int_0^t \delta(t)\mathrm{d}t=\eta(t)。$$

于是，便有 $\delta(t)=\eta'(t)$，且由于 $\mathscr{L}[\eta(t)]=\dfrac{1}{p}$，根据原函数的微分法则，我们重新得到 $\mathscr{L}[\delta(t)]=p\cdot\dfrac{1}{p}=1$。

其次，对于满足原函数条件(1)的任一函数 $\varphi(t)$，据中值定理得

$$\int_0^\infty \varphi(t)\delta_h(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{h}\int_0^h \varphi(t)\mathrm{d}t=\varphi(t^*),$$

其中 $0<t^*<h$。取 $h\to 0$ 时的极限，设

$$\int_0^\infty \varphi(t)\delta(t)\mathrm{d}t=\varphi(0) \tag{6-46}$$

（若 $\varphi(t)$ 在 $t=0$ 处不连续，则 $\varphi(0)$ 表示它的右极限）。特别，取 $\varphi(t)=e^{-pt}$，我们重新得到

$$\mathscr{L}[\delta(t)]=\int_0^\infty \delta(t)e^{-pt}\mathrm{d}t=1。$$

运算法的基本法则可推广到 δ 函数。例如，延迟定理给出：

$$\mathscr{L}[\delta(t-\tau)]=e^{-p\tau}。 \tag{6-47}$$

事实上，根据(6-46)式，有

$$\mathscr{L}[\delta(t-\tau)]=\int_0^\infty \delta(t-\tau)e^{-pt}\mathrm{d}t=\int_0^\infty \delta(t_1)e^{-p(t_1+\tau)}\mathrm{d}t_1=e^{-p\tau},$$

由乘积定理给出：

$$\mathscr{L}^{-1}[1\cdot F(p)]=\int_0^t f(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau=f(t)。 \tag{6-48}$$

事实上，由(6-46)式，我们有

$$\int_0^t f(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t f(t-t_1)\delta(t_1)\mathrm{d}t_1$$

$$= \int_0^\infty f(t-t_1)\delta(t_1)\mathrm{d}t_1 = f(t)。$$

而 $\mathscr{L}f(t)=F(p)$，故(6-48)式是正确的。

下面为读者方便起见，我们列举已得到的运算关系，见原函数和它们的变像一览表。

拉普拉斯变换表

NO.	原函数	像函数
1	1	$\frac{1}{p}$
2	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
3	$t^\alpha(\alpha>-1)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$
4	$e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{p+\lambda}$
5	$e^{-\lambda t}t^\alpha$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(p+\lambda)^{\alpha+1}}$
6	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
7	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
8	$t^n\sin\omega t$	$n!\frac{\mathrm{Im}(p+i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}}$
9	$t^n\cos\omega t$	$n!\frac{\mathrm{Re}(p-i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}}$
10	$e^{-\lambda t}\sin(\omega t+\alpha)$	$\frac{\omega\cos\alpha+(p+\lambda)\sin\alpha}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$
11	$e^{-\lambda t}\cos(\omega t+\alpha)$	$\frac{(p+\lambda)\cos\alpha-\omega\sin\alpha}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$
12	$\mathrm{sh}\,\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
13	$\mathrm{ch}\,\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$

（续表）

NO.	原函数	像函数
14	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{t}$	$\ln\frac{p-a}{p-b}$
15	$\frac{e^{-at}}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p+a}}$
16	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-2a\sqrt{t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{\frac{a^2}{p}}\mathrm{Erf}\left(\frac{a}{\sqrt{p}}\right)^*$
17	$e^{-a^2t^2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{p^2}{4a^2}}\mathrm{Erf}\left(\frac{p}{2a}\right)$
18	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{a^2}{4t}}$	$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$
19	$\frac{1}{\sqrt{\pi a}}\sin 2\sqrt{at}$	$\frac{1}{p\sqrt{p}}e^{-\frac{a}{p}}$
20	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos 2\sqrt{at}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\frac{a}{p}}$
21	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sin\frac{1}{2t}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\sqrt{p}}\sin\sqrt{p}$
22	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos\frac{1}{2t}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\sqrt{p}}\cos\sqrt{p}$
23	$\sqrt{\frac{1}{\pi t}}\sin\omega t$	$\sqrt{\frac{\sqrt{p^2+\omega^2}-p}{p^2+\omega^2}}$
24	$\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\cos\omega t$	$\sqrt{\frac{\sqrt{p^2+\omega^2}+p}{p^2+\omega^2}}$
25	$J_n(t)\quad(n>-1)$	$\frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}$
26	$\frac{J_n(at)}{t}(n>0)$	$\frac{1}{na^n}(\sqrt{p^2+a^2}-p)^n$
27	$t^nJ_n(t)\left(n>-\frac{1}{2}\right)$	$\frac{2\pi}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(p^2+1)^{n+\frac{1}{2}}}$

* $\mathrm{Erf}(x)=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}dx$

（续表）

NO.	原　　函　　数	像　　函　　数
28	$t^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t})(n>-1)$	$\frac{1}{p^{n+1}} e^{-\frac{1}{p}}$
29	$J_0(a\sqrt{t^2-\tau^2})\eta(t-\tau)$	$\frac{1}{\sqrt{p^2+a^2}} e^{-\tau\sqrt{p^2+a^2}}$
30	$si(t)=\int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau} d\tau$	$\frac{\mathrm{arc\,ctg}\, p}{p}$
31	$c(t)=\int_0^t \frac{\cos\tau d\tau}{\sqrt{2\pi\tau}}$	$\frac{1}{2p}\frac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}+p}}{\sqrt{p^2+1}}$
32	$s(t)=\int_0^t \frac{\sin\tau d\tau}{\sqrt{2\pi\tau}}$	$\frac{1}{2p}\frac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}-p}}{\sqrt{p+1}}$
33	$ci(t)=-\int_t^\infty \frac{\cos\tau d\tau}{\tau}$	$\frac{1}{p}\ln\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$
34	$\int_t^\infty \frac{J_0(\tau)}{\tau} d\tau$	$\frac{1}{p}\ln(p+\sqrt{1+p^2})$
35	$-Ei(-t)=\int_t^\infty \frac{e^{-\tau}}{\tau} d\tau$	$\frac{1}{p}\ln(1+p)$
36	$\frac{1}{1\pm t}$	$\mp e^{\pm p}Ei(\mp p)$
37	$\frac{1}{1+t^2}$	$\sin p Ci p-\cos p Si p$
38	$\frac{1}{\sqrt{1+t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{p} Erf\sqrt{p}$
39	$\frac{1}{t}\ln(1+t^2)$	$ci^2 p+si^2 p$
	$\frac{1}{t}\ln(1-t^2)$	$Ei p Ei(-p)$

习　　题

1．试求时间函数 $f(t)$ 为

(1) 衰减指数函数　$f(t)=Ae^{-at}\eta(t)$，$A>0, a>0$；

（2）直线函数 $f(t)=At$，[illegible]，$A>0$

的拉普拉斯变换。

2．试求斜坡函数 $f(t)$（如图 6.6 所示）的拉普拉斯变换。

3．试求锯齿脉冲（如图 6.7 所示）的拉普拉斯变换。

4．试求三角形脉冲（如图 6.8 所示）的拉普拉斯变换。

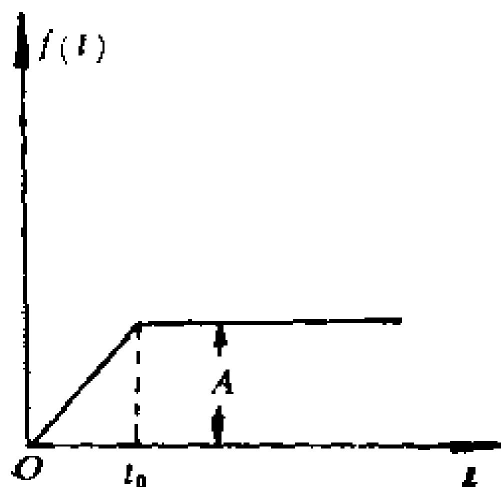


图 6.6

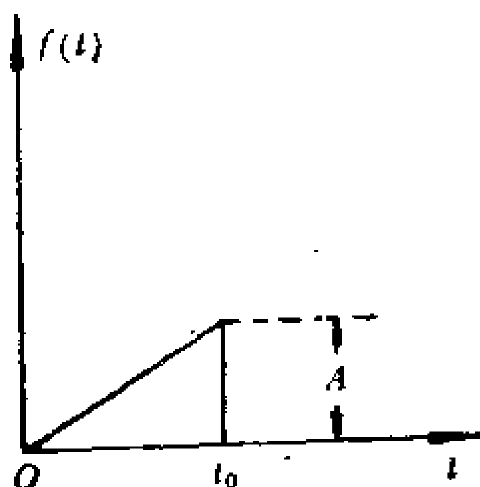


图 6.7

5．试求正弦脉冲（如图 6.9 所示）的拉普拉斯变换。

6．试利用正弦脉冲（如图 6.9 所示）的变换式求正弦波的全波整流波形，

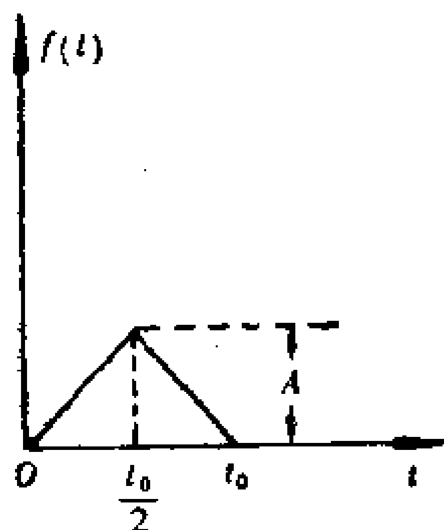


图 6.8

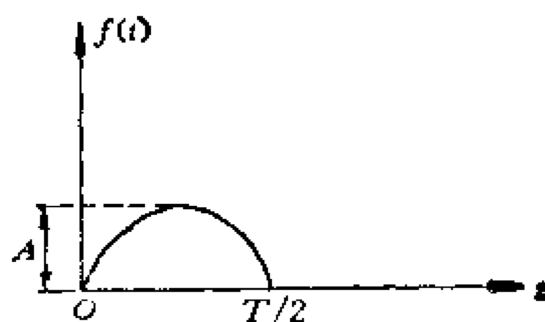


图 6.9

（如图 6.10 所示）的拉普拉斯变换式。

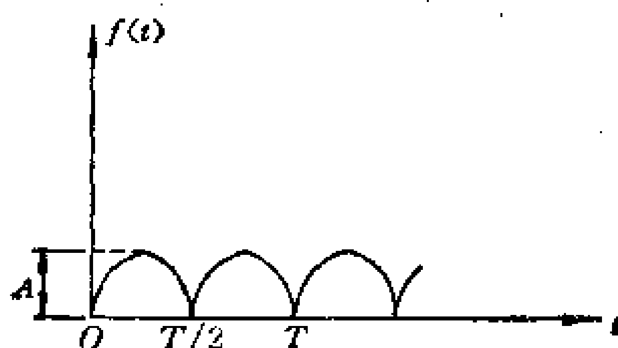


图 6.10

7. 试求下列各函数的拉普拉斯逆变换式：

(1) $\dfrac{\dfrac{5}{p}+4}{2p-3}$；　　(2) $\dfrac{p+4}{2p^2+5p+3}$；

(3) $\dfrac{p-2}{p^3+4p^2+3p}$；　　(4) $\dfrac{2}{p^3+2p^2+2p}$；

(5) $\dfrac{p}{p^2-p+1}$。　　(6) $\dfrac{p+2}{(p+1)^2}$；

(7) $\dfrac{2p^2+3p+2}{(p+1)^3}$；　　(8) $\dfrac{p}{(p+1)^3(p+2)^2(p+5)}$。

(9) $\dfrac{e^{-p}}{4p(p^2+1)}$；

§2 在求解微分方程中的应用

在这一节中，我们将讨论运算法（拉普拉斯变换）在求解线性常微分方程，或线性偏微分方程中的应用。

2.1 解常微分方程与方程组

运算法可格外简单地应用于求解具有常系数的线性微分方程或这种方程组。设给定微分方程

$$L(x)=a_0\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_nx=f(t) \quad (6\text{-}49)$$

与始值条件

$$x(0)=x_0, x'(0)=x_1, \cdots, x^{(n-1)}(0)=x_{n-1}。\tag{6-50}$$

我们设 $a_0 \neq 0$，且函数 $f(t)$，以及解 $x(t)$，连同它到 n 阶为止的导函数，都是原函数。记 $\mathscr{L}x(t)=X(p)$，$\mathscr{L}f(t)=F(p)$。

根据原函数的微分法则（前节中的公式(6-15)或(6-17)，有

$$\mathscr{L}[x^{(k)}(t)]=p^kX(p)-x_0p^{k-1}-x_1p^{k-2}-\cdots-x_{k-1},$$

特别在零始值条件下，即在 $x_0=x_1=\cdots=x_{k-1}=0$ 条件下，有

$$\mathscr{L}[x^{(k)}(t)]=p^k。$$

对(6-49)式进行拉普拉斯变换，则得形如

$$(b_0p^n+b_1p^{n-1}+\cdots+b_n)X(p)=F(p)\tag{6-51}$$

的运算方程；在零始值条件下，则得

$$(a_0p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_n)X(p)=F(p)。\tag{6-52}$$

解上述运算方程，则得

$$X(p)=\frac{F(p)}{b_0p^n+b_1p^{n-1}+\cdots+b_n},\tag{6-53}$$

或

$$X(p)=\frac{F(p)}{a_0p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_n}。\tag{6-54}$$

于是，利用拉普拉斯逆变换公式或展开定理，我们就能求得在始值条件(6-50)下方程(6-49)的解 $x(t)$，$\mathscr{L}x(t)=X(p)$。

我们来看几个用这种方法解方程的例子。

例 6-10 求下列方程的解：

(1) $x'''+3x''+3x'+x=1$， 初值条件全为零；

(2) $x''+\omega^2x=a[\eta(t)-\eta(t-b)]$， 初值条件全为零；

(3) $x''+2x'+(1+a^2)x=0$，$x(0)=x_0$，$x'(0)=x_1$。

解 (1) $x'''+3x''+3x'+x=1$，在全为 0 的始值条件下，其运算方程是

$$(p+1)^3X(p)=\frac{1}{p},$$

其解是

$$X(p)=\frac{1}{p(p+1)^3}=\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}-\frac{1}{(p+1)^2}-\frac{1}{(p+1)^3}。\quad (6-55)$$

利用拉普拉斯变换表上的公式(1)和(11)求出其原函数为

$$x(t)=1-e^{-t}-te^{-t}-\frac{t^2}{2}e^{-t}。\quad (6-56)$$

(2) $x''+\omega^2x=a[\eta(t)-\eta(t-b)]$，在全为零的始值条件下，利用延迟定理求得其运算方程，其解是

$$X(p)=\frac{a(1-e^{-bp})}{p(p^2+\omega^2)}。$$

利用第二展开定理，得

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{a}{p(p^2+\omega^2)}\right]=\frac{a}{\omega^2}-\frac{a}{\omega^2}\cos\omega t=\frac{2a}{\omega^2}\sin^2\frac{\omega t}{2}。$$

根据延迟定理，得

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{ae^{-bp}}{p(p^2+\omega^2)}\right]=\frac{2a}{\omega^2}\sin^2\frac{\omega t}{2}\cdot\eta(t-b)。$$

于是求出

$$x(t)=\frac{2a}{\omega^2}\sin^2\frac{\omega t}{2}[\eta(t)-\eta(t-b)]。\quad (6-57)$$

(3) $x''+2x'+(1+a^2)x=0$，在一般始值条件 $x(0)=x_0, x'(0)=x_1$ 下，其运算方程是

$$(p^2+2p+1+a^2)X(p)=x_0(p+2)+x_1;$$

它的解是

$$X(p)=\frac{x_0p+2x_0+x_1}{(p+1)^2+a^2}=x_0\frac{p+1}{(p+1)^2+\omega^2}+\frac{x_0+x_1}{a}\cdot\frac{a}{(p+1)^2+\omega^2}。$$

利用拉普拉斯变换表上的公式(9)和(10)，即得所求的解是

$$x(t)=\left(x_0\cos at+\frac{x_0+x_1}{a}\sin at\right)e^{-t}。\quad (6-58)$$

完全类似地，可以应用运算法解具有常系数的线性微分方程组。

例 6-11 解方程组：

$$(2x''-x'+9x)-(y''+y'+3y)=0,$$
$$(2x''+x'+7x)-(y''-y'+5y)=0,$$

使其满足始值条件：

$$x(0)=x'(0)=1,\quad y(0)=y'(0)=0。$$

解 其运算方程组为

$$(2p^2-p+9)X-(p^2+p+3)Y=2p+1,$$

$$(2p^2+p+7)X-(p^2-p+5)Y=2p+3。$$

取这两个方程的和与差，有

$$2X-Y=2\frac{p+1}{p^2+4},\quad X+Y=\frac{1}{p-1}。$$

于是得出

$$X=\frac{1}{3}\frac{1}{p-1}+\frac{2}{3}\frac{p}{p^2+4}+\frac{2}{3}\frac{1}{p^2+4},$$

$$Y=\frac{2}{3}\frac{1}{p-1}-\frac{2}{3}\frac{p}{p^2+4}-\frac{2}{3}\frac{1}{p^2+4}。$$

利用拉普拉斯变换表中的公式(4)，(5)和(6)，即得解为

$$x(t)=\frac{1}{3}(e^t+2\cos 2t+\sin 2t)$$

$$y(t)=\frac{1}{3}(2e^t-2\cos 2t-2\sin 2t)。$$

2.2 解偏微分方程

运算法可顺利地应用于求解数学物理方程中的所谓不稳定问题，也即所谓瞬态问题。为简单计，我们将只讨论一维的不稳定问题，我们所求的函数 u 是依赖于两个自变量 x 和 t 的，其中自变量 x 表示实轴上的坐标，t 表示时间。此外，我们假定偏微分方程具有下述形式：

$$L(u)=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial u}{\partial x}+cu+a_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+b_1\frac{\partial u}{\partial t}=0,\qquad (6\text{-}59)$$

其中，a, b, c, a_1 以及 b_1 都是给定区间 $0\leqslant x\leqslant L$ 上 x 的连续函数。我们将假定 $a>0$，且考虑下列两种基本情形：

(1) $a_1<0$，即双曲型的情形；

(2) $a_1=0$, $b_1<0$, 即抛物型的情形。

在上述情形下，不稳定问题就是：对于 $0\leqslant x\leqslant L$ 与 $t\geqslant 0$，求出偏微分方程(6-59)的解 $u(x,t)$，它满足给定的始值条件：

$$u(x,0)=\varphi(x), \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x) \tag{6-60}$$

(第二个条件只在双曲型的情形时才给出)，与边界值条件：

$$u(0,t)=f(t),$$

$$\alpha\frac{\partial u(L,t)}{\partial x}+\beta\frac{\partial u(L,t)}{\partial t}=\gamma u(L,t), \tag{6-61}$$

其中 α, β 和 γ 都是常数。

我们假定：u, $\frac{\partial u}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 视为 t 的函数都是原函数，并且用

$$U(p,x)=\int_0^\infty u(x,t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$

表示函数 u 的变像，由我们的假定，这时

$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\int_0^\infty\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x},$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=\int_0^\infty\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2},$$

(U 对于 x 的求导数我们用记号 d 表示，而不用 ∂，因为在后面 p 将总是作为参数)。根据原函数的微分法则，有

$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]=pU-u(x,0),$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]=p^2U-u(x,0)p-\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}.$$

或，考虑到始值条件(6-60)，有

$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]=pU-\varphi(x),$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]=p^2U-\varphi(x)p-\psi(x).$$

我们还假定，$f(t)$是原函数，且 $F(p)=\mathscr{L}[f(t)]$。于是边值条件

给出

$$U(p,0)=F(p),\quad \alpha\frac{\mathrm{d}U(p,L)}{\mathrm{d}x}+\beta[pU(p,L)-\varphi(L)]=\gamma U(p,L)。$$

因此，运算法将前面给出的偏微分方程(6-59)的不稳定问题的求解归结为：在边值条件

$$U|_{x=0}=F(p),\left[\alpha\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}+(\beta p-\gamma)U-\beta\varphi\right]_{x=L}=0 \qquad (6\text{-}62)$$

下求解常微分方程

$$a\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}+b\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}+AU+B=0。 \qquad (6\text{-}63)$$

其中

$$A=c+a_1p^2+b_1p,$$
$$B=-a_1p\varphi-a_1\psi-b_1\varphi,$$

且 p 是个复参数。

设细长的杆子上的温度 $u(x,t)$ 满足方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}。 \qquad (6\text{-}64)$$

其中 a^2 是常数。考虑在一端为有限的杆子($0<x<\infty$)上的温度分布。如果已知它左端的温度的变化规律。而且杆子原始温度等于 0，即

$$u|_{t=0}=0,\qquad u|_{x=0}=1, \qquad (6\text{-}65)$$

那么利用拉普拉斯变换，可得出一个具有复数 p 的常微分方程

$$pU=a^2\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}, \qquad (6\text{-}66)$$

该方程必须要在边值条件

$$U|_{x=0}=\frac{1}{p} \qquad (6\text{-}67)$$

下求解。(6-66)式的通解是

$$U=ce^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}+c_1e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}。$$

在此，$c_1=0$，否则，当 $x\to\infty$ 时 U 将无限制地增大。因此，在边值条件(6-67)下，有

$$U=\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}。$$

利用拉普拉斯变换表中的公式(6-66)，即得 U 的原函数为

$$u(x,t)=\mathrm{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}\mathrm{e}^{-\tau^2}\mathrm{d}\tau。\qquad (6\text{-}68)$$

习　题

1．求下列微分方程的通解：

(1) $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-4\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+4x=t^2$；

(2) $3\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+12x=2\sin^2t$；

(3) $5\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+5x=\sin t-\cos 2t$；

(4) $\frac{\mathrm{d}^4x}{\mathrm{d}t^4}-4\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3}+6\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-4\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x=(t+1)\mathrm{e}^t$；

(5) $\frac{\mathrm{d}^4x}{\mathrm{d}t^4}+2\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+x=t$。

2．求微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^4x}{\mathrm{d}t^4}-x=0$$

满足初值条件：

$$x(0)=2,\quad x'(0)=-1,\quad x''(0)=-2,\quad x'''(0)=1$$

的解。

3．试求欧拉方程

$$2t^3\frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}t^3}+9t^2\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+7t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-2x=0$$

的全部解。

4．求微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^4x}{\mathrm{d}t^4}+x=2\mathrm{e}^t$$

满足初值条件

$$x(0)=x'(0)=x''(0)=x'''(0)=1$$

的解。

5. 求解下列常微分方程组：

(1) $\frac{dx}{dt}=2x+4y$, $\frac{dy}{dt}=-x-2y$;

(2) $\frac{dx}{dt}=-x+y+1$, $\frac{dy}{dt}=-y+e^t$, $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$;

(3) $\frac{dx}{dt}=-x+y+z$, $\frac{dy}{dt}=x-y+z$, $\frac{dz}{dt}=x+y-z$;

(4) $\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}=y+z$, $\frac{dy}{dt}+\frac{dz}{dt}=z+x$, $\frac{dz}{dt}+\frac{dx}{dt}=x+y$;

(5) $3\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2y}{dt^2}+x+3y=0$, $2\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2y}{dt^2}+x+2y=0$。

6. 求下列弦振动问题的解：

$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x)$, $0<x<\infty$, $t>0$, a 为常数,

$u(x,0)=0$, $u_t(x,0)=0$,

$u(0,t)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}u_x(x,t)=0$。

7. 求下列杆振动问题的解：

$u_{tt}=a^2u_{xx}$, $0<x<l$, $t>0$, a 为常数,

$u(x,0)=0$, $u_t(x,0)=0$,

$u(0,t)=0$, $u_x(l,t)=f_0/E$, E 为常数。

8. 求下列热传导问题的解：

$u_t=ku_{xx}-hu$, $0<x<\infty$, $t>0$, k,h 均为常数,

$u(x,0)=0$,

$u(0,t)=u_0$, u_0 为常数,

$\lim\limits_{x\to\infty}u(x,t)=0$。

§3 在流体传输线中的应用

3.1 流体传输的基本方程

在流体动力控制系统中，常用流体管道来传输各种信号与动力。信号的传输大多数作为扰动波作用于管道的一端，经过一定的延迟与

波形畸变以及波前的弥散以后，在另一端被接收。

假定传输管道的管壁是刚性的（如图6.11所示），温度变化很

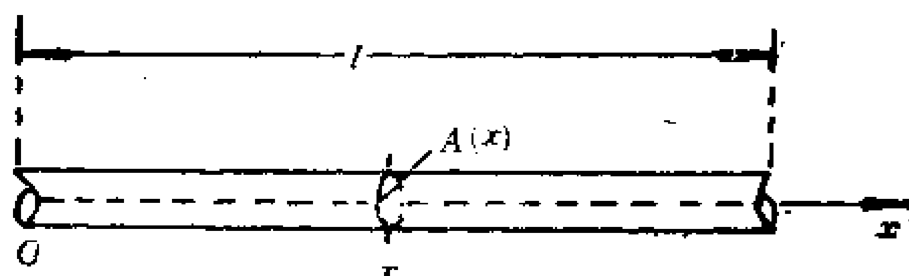


图 6.11

小，以致使得粘性系数μ可认为是常数，并且假定流动是轴对称的层流，即雷诺数$Re<2000$。如图6.11所示，取x轴沿管轴方向。若假设$p(x,t)$，$q(x,t)$分别表示当时间为t时在管道的点x处的压力函数和体积流量，则在线性化的假设下，$p(x,t)$与$q(x,t)$满足下列方程：

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-L\frac{\partial q}{\partial t}-Rq, \tag{6-69}$$

$$\frac{\partial q}{\partial x}=-C\frac{\partial p}{\partial t}-Gp。 \tag{6-70}$$

其中，L，R，C和G分别表示单位长度管道的流感、流阻、流容和流漏，并且

$$L=\frac{1}{A(x)},\quad R=\frac{8\pi\mu}{\rho[A(x)]^2},\qquad C=\frac{A(x)}{a^2}, \tag{6-71}$$

这里，$A(x)$表示管道在点x处的截面积，a表示声速，ρ表示密度。

设$\mathscr{L}[p(x,t)]=p(s,x)$，$\mathscr{L}[q(x,t)]=Q(s,x)$，即

$$P(s,x)=\int_0^\infty p(x,t)e^{-st}dt,$$

$$Q(s,x)=\int_0^\infty q(x,t)e^{-st}dt。$$

分别称$P(s,x)$和$Q(s,x)$为频域S上的压力函数和流量函数。

假设我们所讨论的管道是等截面的圆管，则方程组(6-69)和(6-70)中的L，R，C和G都是常数。于是对方程(6-69)和(6-70)的两端都取拉普拉斯变换，在全为零的始值条件，即在$p(x,0)=0$，$q(x,0)$

$=0$的条件下，我们得到

$$\frac{\partial P}{\partial x}=-(LS+R)Q, \tag{6-72}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-(CS+G)P。 \tag{6-73}$$

方程(6-72)及(6-73)称为**传输方程**。从方程组(6-72)和(6-73)消去函数Q，则得

$$\frac{d^2p(s,x)}{dx^2}-[\lambda(s)]^2P(s,x)=0。 \tag{6-74}$$

其中

$$\lambda(s)=\sqrt{(Ls+R)(Cs+G)} \tag{6-75}$$

称为**传播因子**。方程(6-74)的通解为

$$P(s,x)=A_1e^{-\lambda x}+A_2e^{\lambda x}。 \tag{6-76}$$

将(6-76)式代入(6-72)式，则得

$$Q(s,x)=\frac{1}{Z_C}(A_1e^{-\lambda x}-A_2e^{\lambda x})。 \tag{6-77}$$

其中

$$Z_C=\sqrt{\frac{Ls+R}{CS+G}}$$

称为管道的**特性阻抗**。

利用关系式

$$\mathrm{sh}z=\frac{e^z-e^{-z}}{2},\qquad \mathrm{ch}z=\frac{e^z+e^{-z}}{2},$$

我们将方程(6-76)和(6-77)改写成

$$P(s,x)=B_1\mathrm{sh}\lambda(s)x+B_2\mathrm{ch}\lambda(s)x, \tag{6-78}$$

$$Q(s,x)=-\frac{1}{Z_C(s)}(B_2\mathrm{sh}\lambda(s)x+B_1\mathrm{ch}\lambda(s)x)。 \tag{6-79}$$

公式(6-76)表明，在管道任何点x处的压力是由于前进波$A_2e^{-\lambda x}$和反射波$A_1e^{\lambda x}$作用的结果。前者的强度沿管道而削弱，后者的强度则随着远离始端而增加。如果在任何两点的边界条件是已知的话，则常

数 A_1 和 A_2 就能被确定。

关于边界条件的提法，则由于方程(6-76)和(6-77)或(6-78)和(6-79)中包含两个特定常数，因此需要两个边界条件。

第一种提法是，利用始端($x=0$)的边界条件：

$$P(s,0)=P_0(s), \quad Q(s,0)=Q_0(s)。 \tag{6-80}$$

由方程(6-76)和(6-77)，则有

$$P_0(s)=A_1+A_2, \qquad Q_0(s)=\frac{1}{Z_C}(A_1-A_2)。$$

解之，则得

$$P(s,x)=\frac{1}{2}[(P_0+Q_0Z_C)e^{-\lambda x}+(P_0-Z_CQ_0)e^{\lambda x}], \tag{6-81}$$

$$Q(s,x)=\frac{1}{2Z_C}[(P_0+Q_0Z_C)e^{-\lambda x}-(P_0-Z_CQ_0)e^{\lambda x}]。 \tag{6-82}$$

或者，由方程(6-78)和(6-79)，则得

$$P(s,x)=P_0\mathrm{ch}\lambda x-Z_CQ_0\mathrm{sh}\lambda x。 \tag{6-83}$$

$$Q(s,x)=\frac{1}{Z_C}(Z_CQ_0\mathrm{ch}\lambda x-P_0\mathrm{sh}\lambda x)。 \tag{6-84}$$

第二种提法是，利用始端和终端的边界条件：

$$P(s,0)=P_0(s)-Z_0Q(s,0), \quad P(s,l)=Z_lQ(s,l)。 \tag{6-85}$$

其中，Z_0 与 Z_l 分别表示始端($x=0$)的输入阻抗与终端($x=l$)的负载阻抗。

对方程组(6-76)和(6-77)应用上述边界条件，则得

$$A_1+A_2=P_0(s)-Z_0Q(s,0)=P_0(s)-\frac{Z_0}{Z_C}(A_1-A_2),$$

$$A_1e^{-\lambda l}+Ae^{\lambda l}=Z_lQ(s,l)=\frac{Z_l}{Z_C}(A_1e^{-\lambda l}-A_2e^{\lambda l})。$$

解之，则得

$$A_1=\frac{P_0(s)}{\left(1+\frac{Z_0}{Z_C}\right)(1-\delta_0\delta_le^{-2\lambda l})}, \tag{6-86}$$

$$A_2=\frac{P_0(s)\delta_l e^{-2\lambda l}}{\left(1+\frac{Z_0}{Z_C}\right)(1-\delta_0\delta_l e^{-2\lambda l})}。\tag{6-87}$$

其中

$$\delta_0=\frac{Z_0-Z_C}{Z_0+Z_C},\qquad \delta_l=\frac{Z_l-Z_C}{Z_l+Z_C}\tag{6-88}$$

分别称为始端反射系数与终端反射系数。

将 A_1 和 A_2 的表达式代入方程(6-76)和(6-77)，最后得到

$$P(s,x)=\frac{P_0(s)}{1+\frac{Z_l}{Z_C}}\cdot\frac{e^{-\lambda(s)x}+\delta_l e^{-(2l-x)\lambda(s)}}{1-\delta_0\delta_l e^{-2\lambda(s)l}},\tag{6-89}$$

$$Q(s,x)=\frac{P_0(s)}{Z_0+Z_C}\cdot\frac{e^{-\lambda(s)x}-\delta_l e^{-(2l-x)\lambda(s)}}{1-\delta_0\delta_l e^{-2\lambda(s)l}}。\tag{6-90}$$

3.2 理想流体管路的瞬态传输特性

在理想流体的情形下，$R=0$，$G=0$，此时

$$\lambda(s)=s\sqrt{LC}=\frac{s}{a},$$

$$Z_C(s)=\sqrt{\frac{L}{C}}=\frac{a}{A}。$$

下面我们分别对几种不同情形进行讨论。

一、无限长管路

在此情形下，$l=\infty$。由(6-89)式和(6-90)式得

$$P(s,x)=\frac{P_0(s)}{1+\frac{Z_0}{Z_C}}e^{-sx\sqrt{LC}},\tag{6-91}$$

$$Q(s,x)=\frac{P_0(s)}{Z_0+Z_C}e^{-sx\sqrt{LC}}。\tag{6-92}$$

若 $P(0,t)=p_0$，则 $P_0(s)=\frac{p_0}{s}$。因而

$$P(s,x)=\frac{p_0}{1+\frac{Z_0}{Z_C}}\cdot\frac{1}{s}e^{-sx\sqrt{LC}},\tag{6-93a}$$

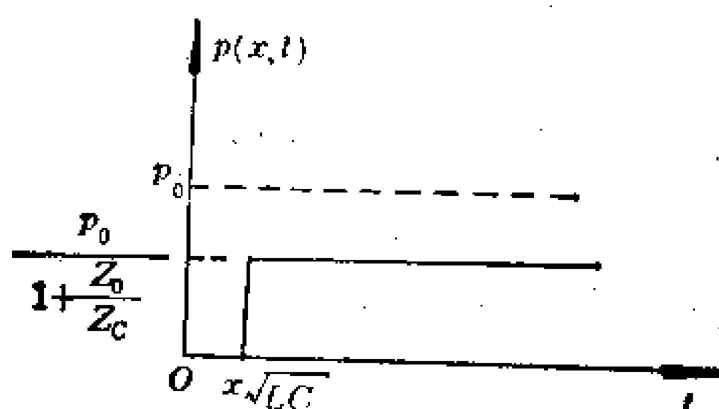
$$Q(s,x)=\frac{p_0}{Z_0+Z_C}\cdot\frac{1}{s}e^{-sx\sqrt{LC}}。\qquad(6\text{-}93b)$$

于是，利用延迟定理，即得所要求的压力函数与体积流量为

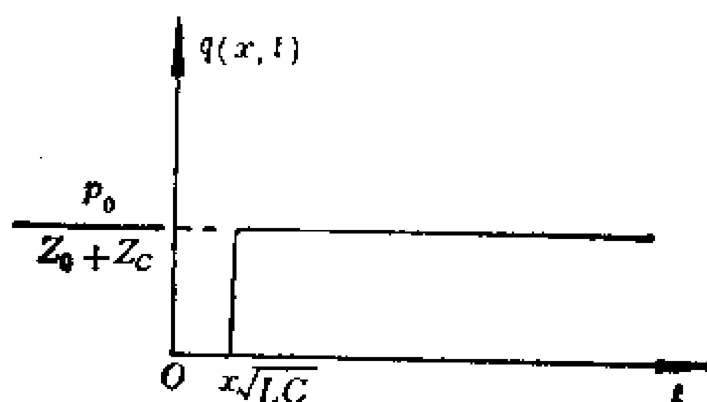
$$p(x,t)=\frac{p_0}{1+\frac{Z_0}{Z_C}}\eta(t-x\sqrt{LC}),\qquad(6\text{-}94a)$$

$$q(x,t)=\frac{p_0}{Z_0+Z_C}\eta(t-x\sqrt{LC})。\qquad(6\text{-}94b)$$

它们的瞬态波形如图 6.12 所示。



(a) 瞬态压力波形



(b) 瞬态流量波形

图 6.12

二、若 $Z_l=Z_C$

此时 $\delta_l=0$，即终端无反射。由方程(6-89)和(6-90)，则得

$$P(s,x)=\frac{P_0(s)}{1+\frac{Z_0}{Z_C}}e^{-sx\sqrt{LC}}, \tag{6-95}$$

$$Q(s,x)=\frac{P_0(s)}{Z_0+Z_C}e^{-sx\sqrt{LC}}。 \tag{6-96}$$

这表明，当 $Z_l=Z_C$ 时，其管路的瞬态传输特性与无限长管路的传输特性一样。

三、若 $Z_0=Z_C$，但 $Z_l\neq Z_C$

此时 $\delta_0=0$（即始端无反射），$\delta_l\neq 0$。则由(6-89)式、(6-90)式得其传输方程为

$$P(s,x)=\frac{P_0(s)}{1+\frac{Z_0}{Z_C}}(e^{-sx\sqrt{LC}}+\delta_l e^{-s(2l-x)\sqrt{LC}}), \tag{6-97}$$

$$Q(s,x)=\frac{P_0(s)}{Z_0+Z_C}(e^{-sx\sqrt{LC}}-\delta_l e^{-s(2l-x)\sqrt{LC}})。 \tag{6-98}$$

在始端输入强度为 p_0 的阶跃压力下，即在 $P_0(s)=\frac{p_0}{s}$ 时，利用延迟定理，则得

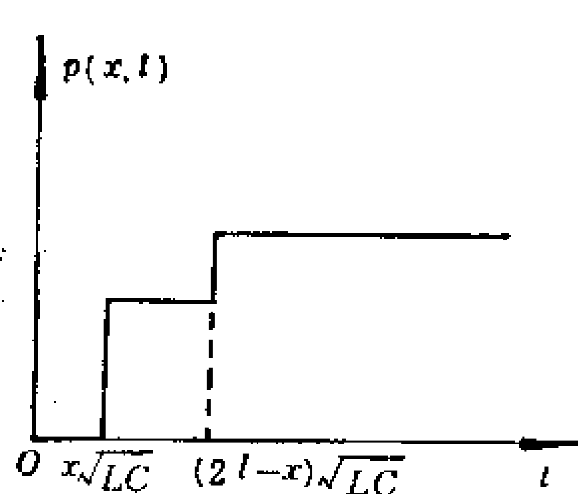
$$p(x,t)=\frac{p_0}{1+\frac{Z_0}{Z_C}}\{\eta(t-x\sqrt{LC})+\delta_l\eta(t-(2l-x)\sqrt{LC})\}, \tag{6-99}$$

$$q(x,t)=\frac{p_0}{Z_0+Z_C}\{\eta(t-x\sqrt{LC})-\delta_l\eta(t-(2l-x)\sqrt{LC})\}。 \tag{6-100}$$

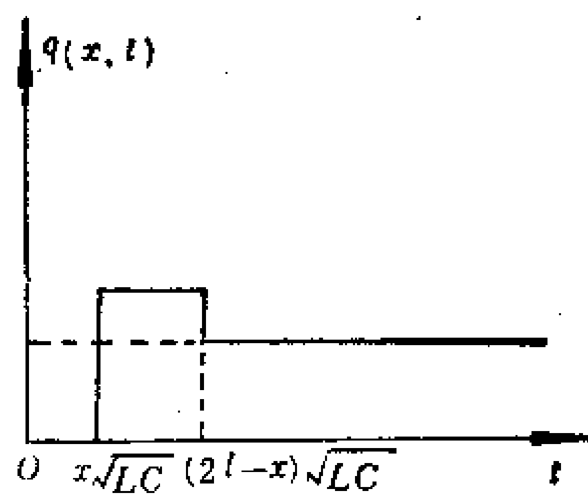
由上述压力函数与流量函数的表达式可知，它们在终端只有一次反射，其波形如图6.13($\delta_l>0$)和图6.14($\delta_l<0$)所示。

四、若 $Z_0=R_0\neq Z_C$，$Z_l=R_l\neq Z_C$

此时为纯流阻情况，且 $\delta_0\neq 0$，$\delta_l\neq 0$。则由方程(6-89)式和(6-90)式得传输方程为

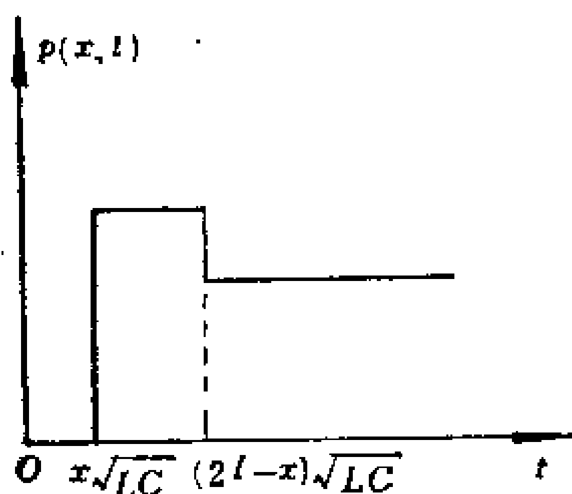


(a) 压力波形

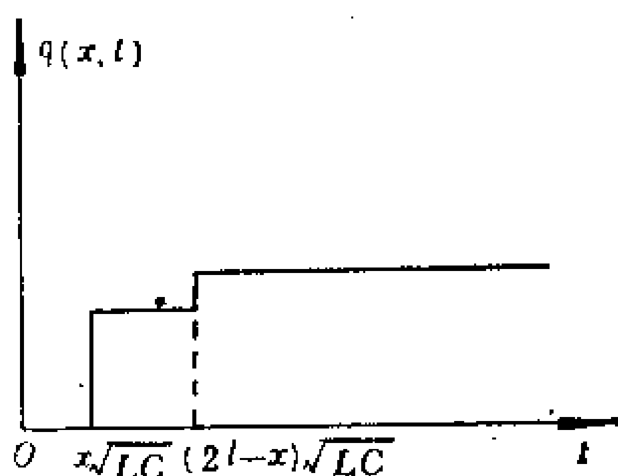


(b) 流量波形

图 6.13



(a) 压力波形



(b) 流量波形

图 6.14

$$P(s,x)=\frac{P_0(s)}{1+\dfrac{Z_0}{Z_C}}\cdot\frac{e^{-sx\sqrt{LC}}+\delta_l e^{-(2l-x)s\sqrt{LC}}}{1-\delta_0\delta_l e^{-2ls\sqrt{LC}}}, \tag{6-101}$$

$$Q(s,x)=\frac{P_0(s)}{Z_0+Z_C}\cdot\frac{e^{-sx\sqrt{LC}}-\delta_l e^{-(2l-x)s\sqrt{LC}}}{1-\delta_0\delta_l e^{-2lx\sqrt{LC}}}。 \tag{6-102}$$

于是，利用展开式

$$\frac{1}{1-\xi}=1+\xi+\xi^2+\cdots,\quad |\xi|<1,$$

由(6-101)式与(6-102)式便得

$$P(s,x)=\frac{P_0(s)}{1+\frac{Z_0}{Z_C}}\sum_{n=0}^{\infty}\delta_0^n\delta_l^n(e^{-\tau_{2n-1}s}+\delta_l e^{-\tau_{2n}s}),\tag{6-103}$$

$$Q(s,x)=\frac{P_0(s)}{Z_0+Z_C}\sum_{n=0}^{\infty}\delta_0^n\delta_l^n(e^{-\tau_{2n-1}s}-\delta_l e^{-\tau_{2n}s})。\tag{6-104}$$

其中

$$\tau_{2n-1}=(2nl+x)\sqrt{LC},\quad \tau_{2n}=[(2n+1)l-x]\sqrt{LC}。$$

若 $p(0,t)=p_0$， 即 $P_0(s)=\frac{p_0}{s}$，则由延迟定理，遂得

$$p(x,t)=\frac{p_0}{1+\frac{Z_0}{Z_C}}\sum_{n=0}^{\infty}\delta_0^n\delta_l^n\{\eta(t-\tau_{2n-1})+\delta_l\eta(t-\tau_{2n})\},\tag{6-105}$$

$$q(x,t)=\frac{p_0}{Z_0+Z_C}\sum_{n=0}^{\infty}\delta_0^n\delta_l^n\{\eta(t-\tau_{2n-1})-\delta_l\eta(t-\tau_{2n})\}。\tag{6-106}$$

这就是我们所求的瞬态压力与瞬态流量的表达式。

利用拉普拉斯变换的终值定理，由传输方程(6-101)与(6-102)，有

$$p(x,\infty)=\lim_{s\to 0}sp(s,x)=\frac{p_0}{1+\frac{Z_0}{Z_C}}\cdot\frac{1+\delta_l}{1-\delta_0\delta_l}=\frac{p_0R_l}{R_0+R_l},\tag{6-107}$$

$$q(x,\infty)=\frac{p_0}{Z_0+Z_C}\cdot\frac{1-\delta_l}{1-\delta_0\delta_l}=\frac{p_0}{R_0+R_l}。\tag{6-108}$$

五、终端与一体积为 V 的腔室相连接的管路

此时

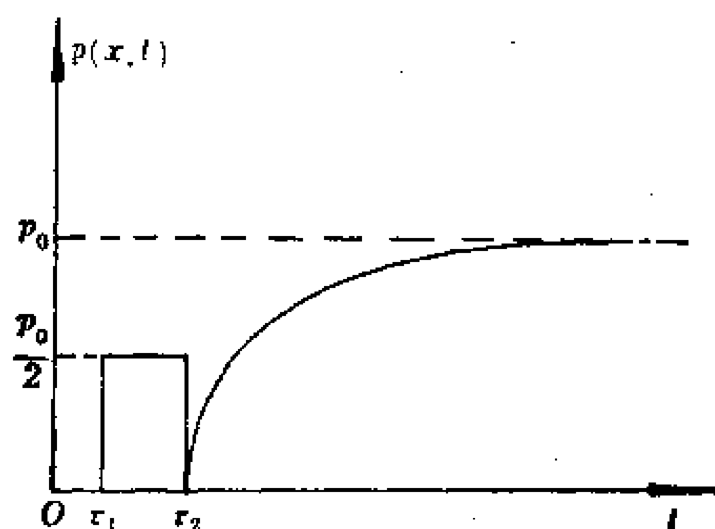
$$Z_l=\frac{1}{C_0 s},\qquad \delta_l=1-\frac{2s}{s+\frac{1}{C_0Z_C}},\tag{6-109}$$

其中，C_0 表示腔室的流容。

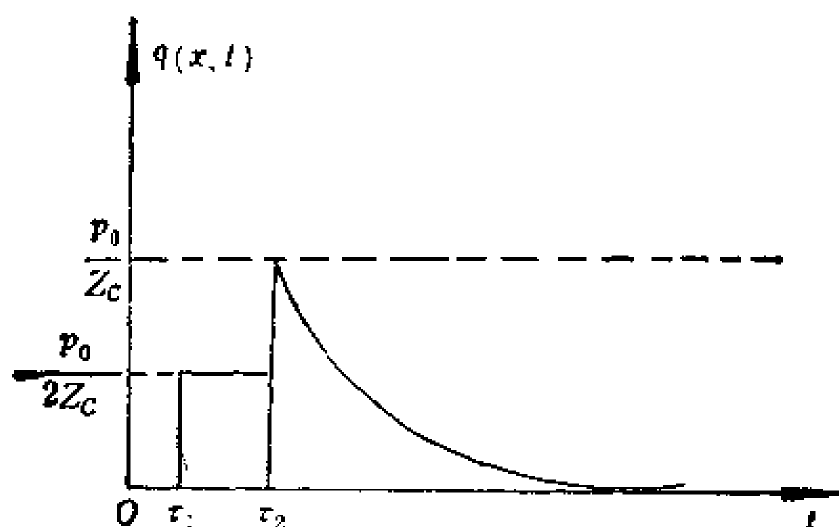
若 $Z_0 = Z_C$，即 $\delta_0 = 0$，这说明只有一次反射。在此假定下，由(6-101)式与(6-102)式，我们有

$$P(s,x) = \frac{P_0(s)}{2}\left\{e^{-sx\sqrt{LC}} + \left(1 - \frac{2s}{s + \frac{1}{C_0 Z_C}}\right)e^{-s(2l-x)\sqrt{LC}}\right\}, \quad (6\text{-}110)$$

$$Q(s,x) = \frac{1}{2Z_C}\left\{e^{-sx\sqrt{LC}} - \left(1 - \frac{2s}{s + \frac{1}{C_0 Z_C}}\right)e^{-s(2l-x)\sqrt{LC}}\right\}。 \quad (6\text{-}111)$$



(a)



(b)

图 6.15

若$P_0(s)=\frac{p_0}{s}$，利用延迟定理和$\mathscr{L}[e^{-\lambda t}]=\frac{1}{s+\lambda}$，由(6-110)式和(6-111)式，我们有

$$p(x,t)=\frac{p_0}{2}\{\eta(t-x\sqrt{LC})+(1-2e^{-(t-(2l-x)\sqrt{LC})/C_0z_0})$$

$$\times\eta(t-(2l-x)\sqrt{LC})\},\tag{6-112}$$

$$q(x,t)=\frac{p_0}{2Z_C}\{\eta(t-x\sqrt{LC})-(1-e^{-(t-(2l-x)\sqrt{LC})/C_0z_C})$$

$$\times\eta(t-(2l-x)\sqrt{LC})\}。\tag{6-113}$$

利用终值定理，我们有

$$p(x,\infty)=\lim_{s\to 0}sp(s,x)=p_0,\tag{6-114}$$

$$q(x,\infty)=\lim_{s\to 0}sQ(s,x)=0。\tag{6-115}$$

由(6-112)—(6-115)式，我们便得到压力与流量的瞬态波形，如图6.15所示。

3.3 粘性流体的无负载短管的传输特性

在这节里，我们讨论输出端有粘性损失且是敞开的短管的传输特性。

设短管长为l，在其$x=l$端的信号输入是阶跃输入，其边界条件为：

$$p(0,t)=0,\quad p(l,t)=p_0,$$

则$P(s,x)$的边界条件为：

$$P(s,0)=0,\quad P(s,l)=\frac{p_0}{s}=P_0(s)。$$

则将公式(6-78)代入边界条件，有

$$B_2=0,\quad B_1=\frac{P_0(s)}{\text{sh}\lambda l}。$$

于是，由公式(6-78)与(6-79)则得

$$P(s,x)=P_0(s)\frac{\text{sh}\lambda x}{\text{sh}\lambda l},\tag{6-116}$$

$$Q(s,x)=-\frac{P_0(s)}{Z_C}\frac{\text{ch}\lambda x}{\text{sh}\lambda l}。\tag{6-117}$$

如果输入频率较低，即可认为 $L=0$，$G=0$，则

$$\lambda(s)=\sqrt{RCS}=\sqrt{RC}\cdot\sqrt{s},\quad Z_C=\sqrt{\frac{R}{CS}}。\tag{6-118}$$

令 $a=l\sqrt{RC}$，$b=x\sqrt{RC}$，则得

$$P(s,x)=\frac{p_0}{s}\cdot\frac{\text{sh}b\sqrt{s}}{\text{sh}a\sqrt{s}},\tag{6-119}$$

$$Q(s,x)=-p_0\sqrt{\frac{C}{R}}\frac{\text{ch}b\sqrt{s}}{\sqrt{s}\ \text{sh}a\sqrt{s}}。\tag{6-120}$$

利用拉普拉斯变换的逆变换公式，则得

$$p(x,t)=\frac{p_0}{2\pi\text{i}}\int_{d-\text{i}\infty}^{d+\text{i}\infty}\frac{\text{sh}b\sqrt{z}}{z\ \text{sh}a\sqrt{z}}\text{d}z,\tag{6-121}$$

$$q(x,t)=-\frac{1}{2\pi\text{i}}\int_{d-\text{i}\infty}^{d+\text{i}\infty}p_0\sqrt{\frac{C}{R}}\frac{\text{ch}b\sqrt{z}}{\sqrt{z}\ \text{sh}a\sqrt{z}}\text{d}z。\tag{6-122}$$

因此，所讨论的问题最终归于计算公式(6-121)与(6-122)中右端的积分。我们以公式(6-122)为例用第二展开定理计算之。为此，首先我们要证明(6-122)中积分号下的被积函数 $Q(z)$满足第二展开定理中的三个条件。

设

$$Q(z)=\frac{\text{ch}b\sqrt{z}}{\sqrt{z}\ \text{sh}a\sqrt{z}},\qquad \sqrt{z}=\xi+\text{i}\eta。$$

由于$\sqrt{z}\,\text{sh}a\sqrt{z}=-\text{i}\sqrt{z}\sin\text{i}a\sqrt{z}$，易知，$z_n=-\frac{n^2\pi^2}{a^2}(n=0,1,$ $2,\cdots)$是 $Q(z)$的分母的一级零点，因而，z_n 是 $Q(z)$的一阶极点，故 $Q(z)$ 是全平面上的半纯函数，它在右半平面 $\text{Re}z>0$ 内是解析的。可见，它满足第二展开定理中的条件(1)。

关于条件(2)，由于 $\text{sh}\zeta=\frac{1}{2}(\text{e}^{\zeta}-\text{e}^{-\zeta})$，$\text{ch}\zeta=\frac{1}{2}(\text{e}^{\zeta}+\text{e}^{-\zeta})$，利

用三角不等式，若 $\operatorname{sh}a\sqrt{z}\neq 0$，且 $\xi>1$，则得

$$\left|\frac{\operatorname{ch}b\sqrt{z}}{\operatorname{sh}a\sqrt{z}}\right|\leqslant\frac{e^{b\xi}+e^{-b\xi}}{e^{a\xi}-e^{-a\xi}}\leqslant\frac{1+e^{-2b}}{1-e^{-2a}}e^{-(a-b)\xi},\qquad(6\text{-}123)$$

于是，在任意半平面 $\operatorname{Re}z\geqslant\alpha>0$ 上，当 $|z|\to\infty$ 时，函数 $Q(z)$ 关于 $\arg z$ 是一致地收敛于零，可见，$Q(z)$ 满足第二展开定理中的条件(2)。

关于条件(3)，由不等式(6-123)，当 $\xi=\operatorname{Re}\sqrt{z}>1$ 时，有

$$|Q(z)|\leqslant M\frac{1}{\sqrt{|z|}}e^{-(a-b)\xi},$$

其中，M 是某一常数，$a-b=(l-x)\sqrt{RC}>0$。于是

$$\left|\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}Q(z)dz\right|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|Q(\alpha+i\sigma)|d\sigma$$

$$\leqslant M_1\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{\alpha^2+\sigma^2}}e^{-(a-b)\xi}d\sigma$$

$$\leqslant M_1\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{\alpha^2+\sigma^2}}e^{-(a-b)\sqrt{\sigma}}d\sigma。\qquad(6\text{-}124)$$

这是因为

$$\xi=\operatorname{Re}\sqrt{z}=\sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\sigma^2}}{2}}>\sqrt{\sigma}。$$

显然，(6-124)式中的积分小于

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\sigma}}e^{-(a-b)\sqrt{\sigma}}d\sigma=2\int_0^{\infty}e^{-(a-b)\tau}d\tau=\frac{2}{a-b}<\infty,$$

故积分 $\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}Q(z)dz$ 绝对收敛。可见，$Q(z)$ 满足第二展开定理中的条件(3)。

根据第二展开定理，则

$$q(x,t)=p_0\sqrt{\frac{C}{R}}\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{Res}\left(\frac{\cos ib\sqrt{z}}{-i\sqrt{z}\sin ia\sqrt{z}}e^{zt},\ z_n\right)。\quad(6\text{-}125)$$

由于 $ai\sqrt{z_n}$ $(n=1,2,\cdots)$ 都是 $Q(z)$ 的一阶极点，根据留数计算方

法，有

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{zt}\cos ib\sqrt{z}}{-i\sqrt{z}\sin ai\sqrt{z}},\ z_n=-\frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)$$

$$=(-1)^n\frac{2}{a}e^{-\frac{n^2\pi^2}{a^2}t}\cos\frac{n\pi x}{l}$$

$$=(-1)^n\frac{2}{a}\left(\cos\frac{n\pi x}{l}\right)\exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{RCl^2}t\right).$$

注意到 $\lim\limits_{\zeta\to0}\frac{\sin\zeta}{\zeta}=1$，则在 $z_0=0$ 的留数为

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{zt}\cos ib\sqrt{z}}{-i\sqrt{z}\sin ia\sqrt{z}}\right)=\lim_{z\to0}z\cdot\left(\frac{-e^{zt}\cos ib\sqrt{z}}{i\sqrt{z}\sin ia\sqrt{z}}\right)$$

$$=\frac{1}{a}。$$

于是，由公式(6-125)，我们获得

$$q(x,t)=-p_0\sqrt{\frac{C}{R}}\left\{\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{a}\left(\cos\frac{n\pi x}{l}\right)\exp\left(-\frac{n^2\pi^2t}{RCl^2}\right)\right\}$$

$$=\frac{-p_0}{Rl}\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\cos\frac{n\pi x}{l}\right)\exp\left(-\frac{n^2\pi^2t}{RCl^2}\right)\right\}。\quad(6\text{-}126)$$

同理，利用第二展开定理，我们不难获得

$$p(x,t)=p_0\left\{\frac{x}{l}+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\sin\frac{n\pi x}{l}}{n\pi}\right)\exp\left(-\frac{n^2\pi^2t}{RCl^2}\right)\right\}。\quad(6\text{-}127)$$

由公式(6-126)，在 $x=l$ 的始端，有

$$\lim_{t\to\infty}q(x,t)=\lim_{t\to\infty}\frac{-p_0}{Rl}\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2t}{RCl^2}\right)\right\}=\frac{p_0}{Rl},$$

而在另一端 $x=0$ 处，流量 $q(0,t)$ 为

$$q(0,t)=\frac{-p_0}{Rl}\left\{1-2\left[\exp\left(-\frac{\pi^2t}{RCl^2}\right)-\exp\left(-\frac{4\pi^2t}{RCl^2}\right)+\exp\left(-\frac{9\pi^2t}{RCl^2}\right)-\cdots\right]\right\}。\quad(6\text{-}128)$$

注意，在这一节的推导中，我们认为，当流动方向与正实轴方向相同时，流量是正的；反之，则流量是负的。所以，在(6-126)式与(6-128)式中，由于其右端有负号，则说明此时流体的流动方向是逆实轴方向。

3.4 流体管系的固有频率

我们知道，对于确定的管系，就有确定的固有频率与之对应。当外界激励频率与管系的固有频率一致时，管系内的流体就会发生共振，这时管内流体的脉动会大大加剧。因此，为了利用共振或避免共振，就需要知道管系的固有频率。

下面我们将介绍流体阻抗法，它是确定管系固有频率的有效工具。

在管路传输理论中，我们定义在点 x 的流体阻抗 $Z(s,x)$ 为脉动压力 $P(s,x)$ 与脉动流量 $Q(s,x)$ 之比，即

$$Z(s,x)=\frac{P(s,x)}{Q(s,x)}。\tag{6-129}$$

特别地

$$Z_0=\frac{P_0(s)}{Q_0(s)},\qquad Z_l=\frac{P_l(s)}{Q_l(s)}。\tag{6-130}$$

其中 $P_l(s)=P(s,l)$，$Q_l(s)=Q(s,l)$。利用方程(6-83)和(6-84)，我们获得 $Z(s,x)$ 用始端阻抗 Z_0 表示的表达式

$$Z(s,x)=\frac{Z_0\mathrm{ch}\lambda(s)x-Z_C\mathrm{sh}\lambda(s)x}{-Z_0\mathrm{sh}\lambda(s)x+Z_C\mathrm{ch}\lambda(s)x}\cdot Z_C,\tag{6-131}$$

且不难获得 $Z(s,x)$ 用终端阻抗 Z_l 表示的表达式

$$Z(s,x)=\frac{Z_l\cdot\mathrm{ch}\lambda(s)(l-x)+Z_C\cdot\mathrm{sh}\lambda(s)(l-x)}{Z_l\cdot\mathrm{sh}\lambda(s)(l-x)+Z_C\cdot\mathrm{ch}\lambda(s)(l-x)}\cdot Z_C。\tag{6-132}$$

于是，我们有

$$Z_l=\frac{Z_0\cdot\mathrm{ch}\lambda(s)l-Z_C\cdot\mathrm{sh}\lambda(s)l}{-Z_0\mathrm{sh}\lambda(s)l+Z_C\cdot\mathrm{ch}\lambda(s)l}\cdot Z_C,\tag{6-133}$$

$$Z_0=\frac{Z_l\cdot\mathrm{ch}\lambda(s)l+Z_C\cdot\mathrm{sh}\lambda(s)l}{Z_l\cdot\mathrm{sh}\lambda(s)l+Z_C\cdot\mathrm{ch}\lambda(s)l}\cdot Z_C。\tag{6-134}$$

值得注意的，在第二种边界条件下，即在边界条件(6-85)下，关

系式(6-133)和(6-134)仍然成立。

在理想流体的情形下，如前所述，$\lambda(s)=\frac{s}{a}$，$Z_C=\frac{a}{A}$，其中 a 是声速，A 是管道的截面积。而且，我们知道，固有频率 $f=\omega/2\pi$，ω是管系的角频率。因此，我们只要求出管系的角频率就行了。为此，令 $s=\mathrm{i}\omega$，将它代入关系式(6-133)和(6-134)，并注意到关系式

$$\mathrm{ch\,i}z=\cos z,\ \mathrm{sh\,i}z=\mathrm{i}\sin z,$$

即得 ω 所需满足的方程

$$Z_l=\frac{Z_0-\mathrm{i}Z_C\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\omega l}{a}\right)}{-\mathrm{i}Z_0\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\omega l}{a}\right)+Z_C}\cdot Z_C,\tag{6-135}$$

或者

$$Z_0=\frac{Z_l+\mathrm{i}Z_C\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\omega l}{a}\right)}{\mathrm{i}Z_l\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\omega l}{a}\right)+Z_C}\cdot Z_C。\tag{6-136}$$

解此方程就能求得角频率 ω，从而求得固有频率。

下面，我们讨论几种常见管系的固有频率。

一、均匀单管的固有频率

1. 始端敞开、终端具有一个容积为 V 的腔室(如图 6.16 所示)。此时

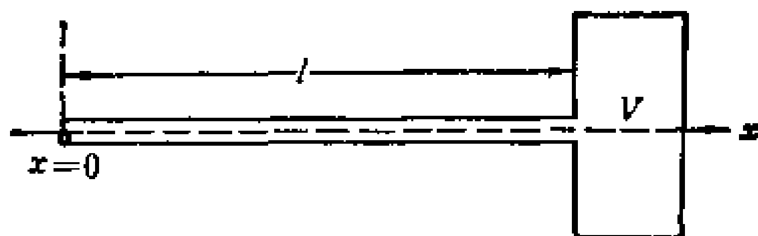


图 6.16

$$Z_0=0,\quad Z_l=\frac{1}{Cs}=\frac{a^2}{\mathrm{i}\omega V}。$$

将这条件代入(6-135)式，便得角频率ω所应满足的方程为

$$-iZ_C\cdot \mathrm{tg}\left(\frac{\omega l}{a}\right)=\frac{a^2}{i\omega V}。$$

注意到$Z_C=\frac{a}{A}$，$\omega=2\pi f$，即得固有频率f所应满足的方程为

$$\mathrm{tg}\left(\frac{2\pi lf}{a}\right)=\frac{aA}{2\pi Vf}, \tag{6-137}$$

或

$$\mathrm{ctg}\left(\frac{2\pi lf}{a}\right)=\frac{V}{Al}\left(\frac{2\pi lf}{a}\right)。 \tag{6-137'}$$

解方程(6-137)就能求得固有频率f。

若管子很短，则l很小，那么

$$\mathrm{tg}\left(\frac{2\pi lf}{a}\right)\approx\frac{2\pi lf}{a}。$$

将它代入方程(6-137)，便得

$$f=\frac{a}{2\pi}\sqrt{\frac{A}{lV}}, \tag{6-138}$$

此即海姆霍茨(Helmholtz)谐震器的固有频率公式。若管子很长（即l较长）而腔室（即V）很小，此时

$$\frac{aA}{2\pi fV}=\infty \quad 或 \quad \frac{V}{Al}=0,$$

将上式代入方程(6-137)或(6-137′)，便有

$$\mathrm{tg}\left(\frac{2\pi lf}{a}\right)=\infty \quad 或 \quad \cos\left(\frac{2\pi lf}{a}\right)=0。$$

解之即得

$$\frac{2\pi lf}{a}=\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi, \quad 即 \quad f=\frac{2n-1}{4}\left(\frac{a}{l}\right), \quad n=1,2,\cdots。 \tag{6-139}$$

这相当于管子终端完全封闭时的固有频率。

2．若$Z_0=\infty$，$Z_l=\frac{a^2}{iV\omega}$。此时，由(6-135)式便得

$$\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi lf}{a}\right)=-\frac{V}{Al}\left(\frac{2\pi lf}{a}\right)。\tag{6-140}$$

设 $x=\frac{2\pi lf}{a}$， $\alpha=\frac{V}{Al}$，则(6-140)就成为

$$\operatorname{tg}x=-\alpha x。\tag{6-141}$$

易知它有无穷多个解，如图 6.17 所示。

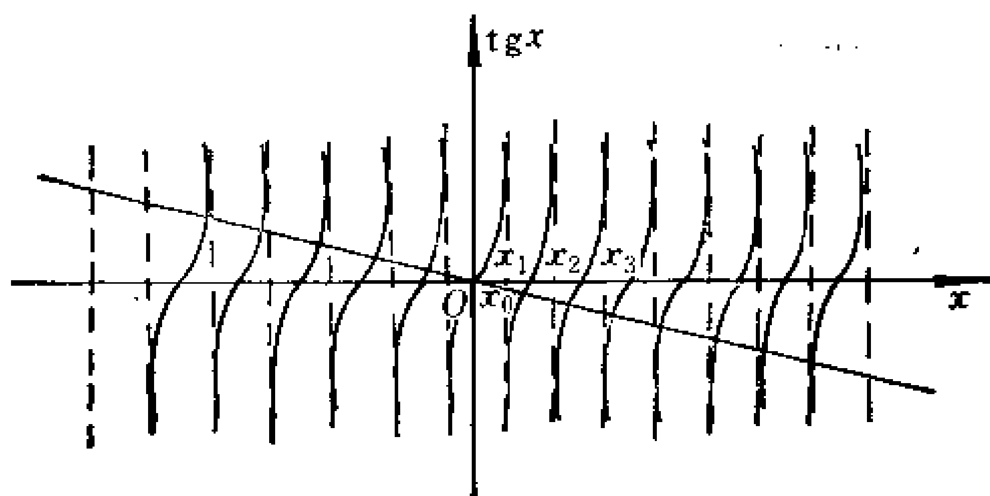


图 6.17

设方程(6-141)的解为 $x_n\geqslant0, n=0,1,2,\cdots$。于是，则得

$$f_n=\frac{ax_n}{2\pi l}\quad(n=0,1,2,\cdots)。$$

二、串联管系的固有频率

为方便起见，我们以两根管串联为例讨论之。如图6.18 所示，

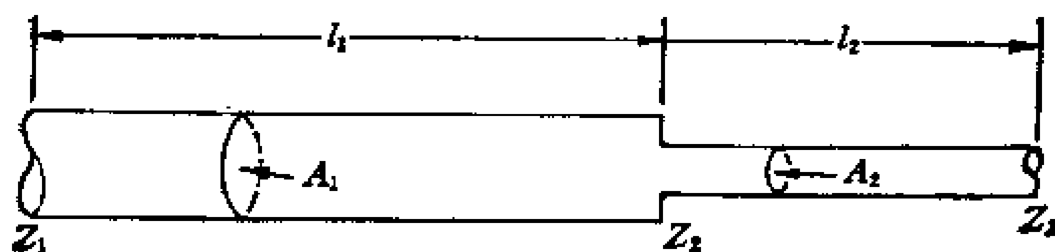


图 6.18

设 $p_1(x,t)$，$q_1(x,t)$ 与 $p_2(x,t)$，$q_2(x,t)$ 分别表示第一、第二根管道的瞬态压力与瞬态流量。我们假定，在任何瞬间，两管连接处的压力相等，且流量连续，即

$$p_1(l_1,t)=p_2(0,t),\qquad q_1(l,t)=q_2(0,t)。$$

因而 $P_1(s,l)=P_2(s,0)$，$Q_1(s,l)=Q_2(s,0)$。

因此 $$Z_1(s,l)=Z_2(s,0)。$$

这说明在两管连接处的阻抗可用一个阻抗值来表示。设 Z_1，Z_2 与 Z_3 分别表示第一根管的始端阻抗、连接处的阻抗与第二根管的终端阻抗，则根据公式(6-136)，对第一、二根管，即有

$$Z_1=\frac{Z_2+\mathrm{i}Z_{C_1}\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\omega l_1}{a}\right)}{\mathrm{i}Z_2\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\omega l_1}{a}\right)+Z_{C_1}}\cdot Z_{C_1},\qquad \left(Z_{C_1}=\frac{a}{A_1}\right);\qquad (6\text{-}142)$$

$$Z_2=\frac{Z_3+\mathrm{i}Z_{C_2}\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\omega l_2}{a}\right)}{\mathrm{i}Z_3\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\omega l_2}{a}\right)+Z_{C_2}}\cdot Z_{C_2}\quad \left(Z_{C_2}=\frac{a}{A_2}\right)。\qquad (6\text{-}143)$$

1．若 $Z_1=0$，$Z_3=\infty$，则由上述方程组得

$$\begin{cases} Z_2=-\mathrm{i}Z_{C_1}\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\omega l_1}{a}\right),\\ Z_2=\dfrac{Z_{C_2}}{\mathrm{itg}\left(\frac{\omega l_2}{a}\right)}。\end{cases}$$

即

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\omega l_1}{a}\right)\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\omega l_2}{a}\right)=\frac{A_1}{A_2}。\qquad (6\text{-}144)$$

解之即得 $Z_1=0$，$Z_3=\infty$ 时管系的固有频率。

特别当 $A_1=A_2$ 时，得

$$1-\mathrm{tg}\left(\frac{\omega l_1}{a}\right)\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\omega l_2}{a}\right)=0。$$

于是，即得 $\mathrm{tg}\left(\frac{\omega(l_1+l_2)}{a}\right)=\infty$。解之即得

$$f=\frac{2n-1}{4}\left(\frac{a}{l_1+l_2}\right),\quad n=1,2,\cdots。$$

这就是始端敞开、终端封闭的长为(l_1+l_2)的均匀单管的固有 频 率。

2. 若$Z_1=0$，$Z_3=\dfrac{a^2}{\mathrm{i}V\omega}$。此时，第二根管的终端具有一个 体 积为$V$ 的腔室。将它们代入方程(6-142)和(6-143)，便得

$$-\mathrm{i}Z_{C_1}\mathrm{tg}\left(\frac{\omega l_1}{a}\right)=\frac{-\dfrac{\mathrm{i}a^2}{\omega V}+\mathrm{i}Z_{C_2}\cdot\mathrm{tg}\left(\dfrac{\omega l_2}{a}\right)}{\dfrac{a^2}{\omega V}\cdot\mathrm{tg}\left(\dfrac{\omega l_2}{a}\right)+Z_{C_2}}\cdot Z_{C_2},$$

于是即得此种管系之固有频率方程为

$$\frac{\mathrm{tg}\left(\dfrac{\omega l_2}{a}\right)+\dfrac{\omega V}{aA_2}}{1-\dfrac{\omega V}{aA_2}\cdot\mathrm{tg}\left(\dfrac{\omega l_2}{a}\right)}=\frac{A_1}{A_2}\ \mathrm{ctg}\left(\frac{\omega l_1}{a}\right)。\tag{6-145}$$

特别当$V\to0$时，方程(6-145)就退化成(6-144)；当$V\to\infty$时，方程(6-145)退化成

$$\frac{\mathrm{tg}\left(\dfrac{\omega l_1}{a}\right)}{\mathrm{tg}\left(\dfrac{\omega l_2}{a}\right)}=-\frac{A_1}{A_2}。\tag{6-146}$$

这就是$Z_0=0$与$Z_3=0$时管系的固有频率方程。

习　　题

1. 试求始端阻抗为$Z_0=Z_C$，且终端阻抗Z_l为

$$Z_l=R_l+\frac{1}{C_0s}$$

的理想流体管路的瞬态压力$p(x,t)$与流量$q(x,t)$的表达式与波形。

2. 试求利用终端边界条件

$$p(l,t)=p_l(t),\quad q(l,t)=q_l(t)$$

时的传输方程。

3．试求$G=0$，$Z_l=\infty$的粘性流体管路的瞬态压力$p(x,t)$与流量$q(x,t)$的表达式。

4．试求分叉管系的固有频率方程。

第七章　Z-变换及其应用

如在上一章中所讨论的，我们讨论过的信号，周期信号或非周期信号，除了个别的不连续点外，一般都是时间的连续函数，如图7.1(a)所示，这类信号称为连续信号。连续信号作用于线性系统时，其响应也是连续信号，这种线性系统称为连续系统。在研究连续系统的激励与响应的关系以及分析系统的特性时可采用拉普拉斯变换法。

随着电子计算机及各种数字技术的不断发展，常常将信号按一定时间采样后再进行传送或处理，如图7.1(b)所示，每隔时间T取函数$f(t)$的一个值。T称为采样周期，这样的函数只在周期点$nT(n=0,1,2,\cdots)$处才有值，记为$f^*(t)$，这类信号称为离散信号。离散信号作用于线性系统时，这种线性系统称为离散系统。在研究离散系统的激励与响应的关系以及分析系统的特性时常采用Z-变换。所以，在这章中，我们将讨论Z-变换及其在离散系统中的应用。

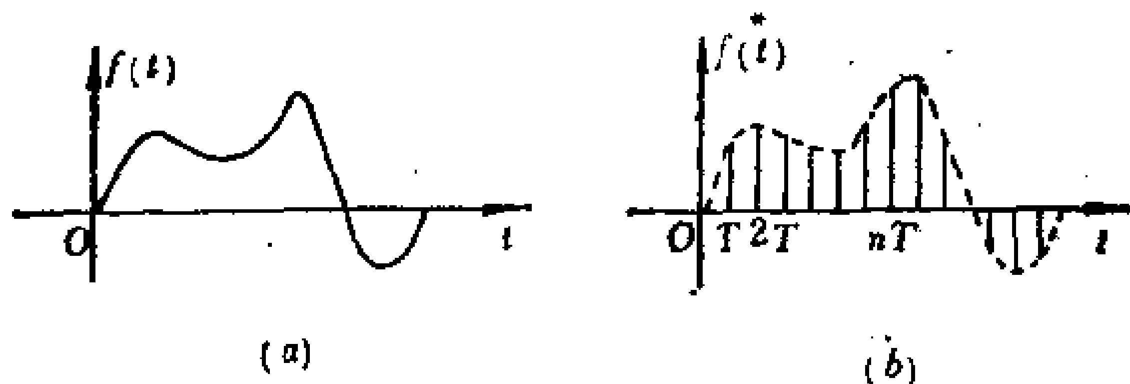


图　7.1

由于采样输出信号$f^*(t)$仅在采样瞬间$0,T,2T,\cdots$有值，其中T为采样周期。因此，可将$f^*(t)$看作为冲击函数，则冲击函数的强度等于输入信号$f(t)$在采样瞬间的值。所以离散信号可表示为

$$f^*(t)=f(t)\delta_T(t), \tag{7-1}$$

其中，$\delta_T(t)$是周期为T的单位冲击序列，即

$$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)。\tag{7-2}$$

$f^*(t)=f(t)\delta_T(t)$的关系如图 7.2 所示。

由以上两式，离散信号可表示为

$$f^*(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT)\delta(t-nTt。\tag{7-3}$$

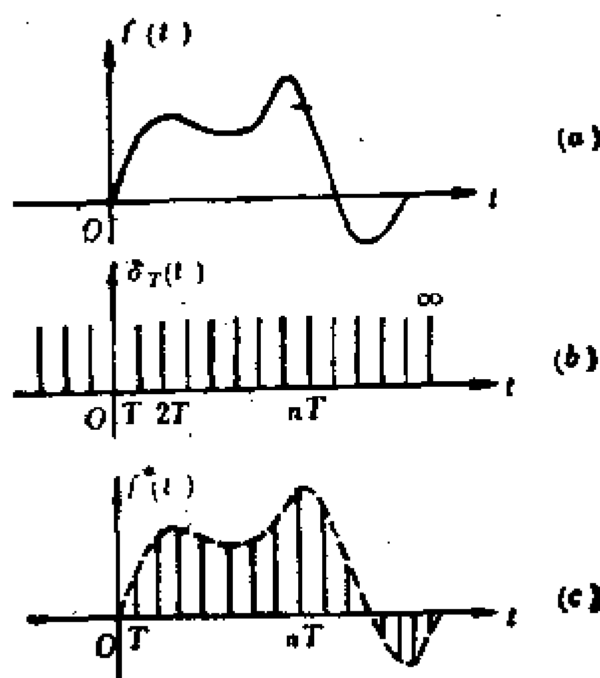


图 7.2

§1 Z-变换

1.1 Z-变换式

对任何连续函数$f(t)$，假若$t<0$时$f(t)=0$，则由(7-2)式，其采样函数为

$$f^*(t)=\sum_{n=0}^{\infty}f(nT)\delta(t-nT)。\tag{7-4}$$

将$f^*(t)$作拉普拉斯变换，则为

$$\begin{aligned}F^*(p)&=\mathscr{L}[f^*(t)]=\mathscr{L}\left[\sum_{n=0}^{\infty}f(nT)\,\delta(t-nT)\right]\\&=\sum_{n=0}^{\infty}f(nT)e^{-nTp},\end{aligned}\tag{7-5}$$

其中利用到 $\mathscr{L}[\delta(t-nT)]=e^{-nTp}$。

由于在上式中，复频率 s 仅在指数函数中出现，为方便计，令

$$z=e^{Tp}, \tag{7-6}$$

将它代入(7-5)式，则变换式 $F^*(p)$ 变为 z 的函数，并可写为

$$F^*(p)=\sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n}。 \tag{7-7}$$

令

$$\mathscr{F}(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n}, \tag{7-8}$$

称它为 $f(t)$ 或 $f(nT)$ 的 Z-变换，记为 $\mathscr{Z}[f(t)]$ 或 $\mathscr{Z}[f(nT)]$。于是

$$F^*(p)=\mathscr{F}(z), \tag{7-9}$$

$$\mathscr{Z}[f(t)]=\mathscr{F}(z), 或 \mathscr{Z}[f(nT)]=\mathscr{F}(z)。 \tag{7-10}$$

例 7-1 下列函数当 $t<0$ 时 $f(t)=0$，求其 Z-变换式。

(1) $f(t)=\delta(t-nT)$；

(2) $f(t)=e^{at}\eta(t)$，$\eta(t)$ 是单位函数；

(3) $f(t)=\eta(t)$；

(4) $f(t)=t\eta(t)$ 为单位斜坡函数。

解

(1) 若 $f(t)=\delta(t-nT)$，则由 $\mathscr{L}[\delta(t-nT)]=e^{-nTs}$ 得

$$\mathscr{Z}[\delta(t-nT)]=z^{-n}。 \tag{7-11}$$

特别地，当 $n=0$ 时，即 $f(t)$ 为单位冲击函数 $\delta(t)$ 时，得

$$\mathscr{Z}[\delta(t)]=z^0=1。 \tag{7-12}$$

(2) 若 $f(t)=e^{at}\eta(t)$，由于 $\eta(t)$ 是单位函数，则由公式(7-10)得

$$\mathscr{Z}[e^{at}]=\sum_{n=0}^{\infty} e^{an}z^{-n}=\frac{1}{1-e^{aT}z^{-1}}=\frac{z}{z-e^{aT}}。 \tag{7-13}$$

(3) 若 $f(t)=\eta(t)$，则得

$$\mathscr{Z}[\eta(t)]=\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}=\frac{z}{z-1}。 \tag{7-14}$$

(4) 若 $f(t)=t\eta(t)$，则由公式(7-7)得

$$\mathscr{Z}[t\eta(t)]=\sum_{n=0}^{\infty}f(nT)z^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}nTz^{-n}=\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}=\frac{Tz}{(z-1)^2},$$

所以

$$\mathscr{Z}[t]=\frac{Tz}{(z-1)^2}。\tag{7-15}$$

由于方程(7-1)包含了两个函数的乘积，因此，为了获得 $f^*(t)$的拉普拉斯变换，可以利用前面一章 1.3 中的原函数乘积定理。

设 $\mathscr{L}[f(t)]=F(p)$。由于

$$\mathscr{L}[\eta(t)\delta_T(t)]=\mathscr{L}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nTp}$$

$$=\frac{1}{1-e^{-Tp}},\quad |e^{-Tp}|<1,\tag{7-16}$$

根据原函数乘积定理，则得

$$\mathscr{L}[f^*(t)]=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(q)\frac{1}{1-e^{-T(p-q)}}dq,\tag{7-17}$$

其中 $a>s_1$，且 $\operatorname{Re}p>s_2+a$，s_1 与 s_2 分别是 $f(t)$与 $\delta_T(t)\eta(t)$ 的增长指数。

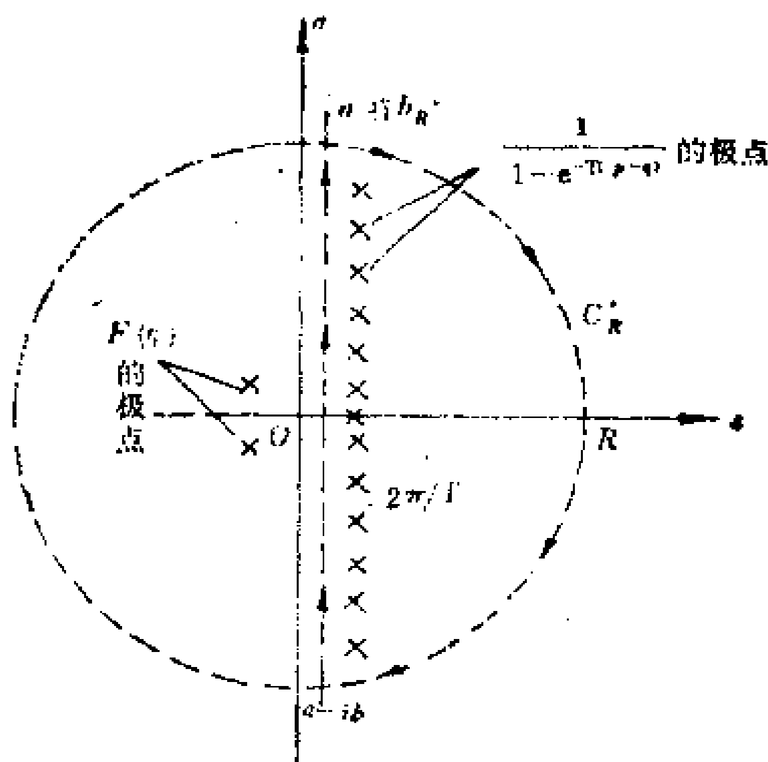


图 7.3

如果F(p)是有理函数，且其分母的次数比其分子的次数大两次，又设 $C'_R=\{q\in\mathscr{C}:|q|=R$ 且 $\operatorname{Re} q\geqslant a\}$（如图7.3所示），则易知

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C'_R}F(q)\frac{1}{1-e^{-T(p-q)}}dq=0。$$

设直线 $(a-i\infty, a+i\infty)$ 与圆周 $|q|=R$ 的交点为 $a\pm i\,b_R$，又设 Γ'_R 为直线段 $(a-ib_R, a+ib_R)$ 与圆弧 C'_R 所组成的闭曲线，则

$$F^*(p)=\mathscr{L}[f^*(t)]=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma'_R}F(q)\frac{1}{1-e^{-T(p-q)}}dq$$

$$=\lim_{R\to\infty}\left\{-\sum_{q_n}\operatorname{Res}\left(\frac{F(q)}{1-e^{-T(p-q)}}, q_n\right)\right\}。$$

其中，q_n 为位于闭曲线 Γ'_R 内的被积函数的极点。故

$$F^*(p)=-\sum_{q_n}\operatorname{Res}\left(\frac{F(q)}{1-e^{-T(p-q)}}, q_n\right), \qquad (7\text{-}18)$$

其中，q_n 为被积函数的位于右半平面 $\operatorname{Re} q>a$ 内的所有极点。

积分号下被积函数位于右半平面上的极点是下列函数的零点：

$$1-e^{-T(p-q)}=0, \qquad (7\text{-}19)$$

即

$$q_n=p+\frac{2n\pi}{T}i \quad (n=0, \pm1, \pm2, \cdots) \qquad (7\text{-}20)$$

都是一阶极点，且被积函数在点 $q=q_n$ 的留数为

$$\operatorname{Res}\left(\frac{F(q)}{1-e^{-T(p-q)}}, q_n\right)=-\frac{F(q_n)}{T}。 \qquad (7\text{-}21)$$

故

$$F^*(p)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F\left(p+\frac{2n\pi}{T}i\right)。 \qquad (7\text{-}22)$$

这里 $\frac{2\pi}{T}=\omega_r$ 是时间的角频率或者是重复频率，因此，我们获得计算 $F^*(p)$ 的另一计算公式：

$$F^*(p)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(p+in\omega_r)=\mathscr{Z}[F(p)]。 \qquad (7\text{-}23)$$

方程(7-23)是无穷级数形式，因而，脉冲的输入量包含有高频成分（分量）。

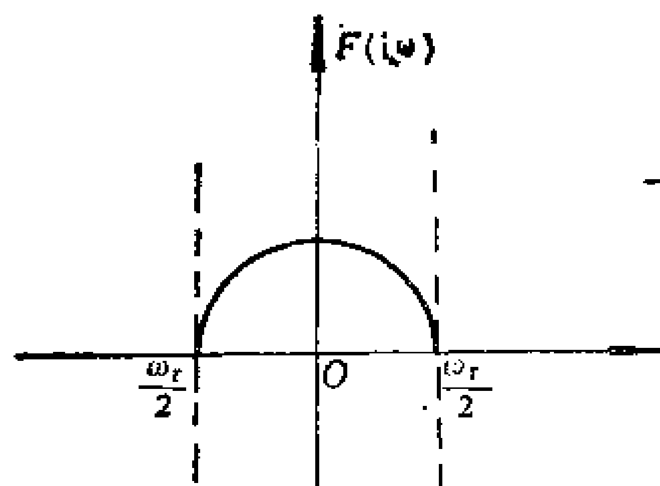


图 7.4

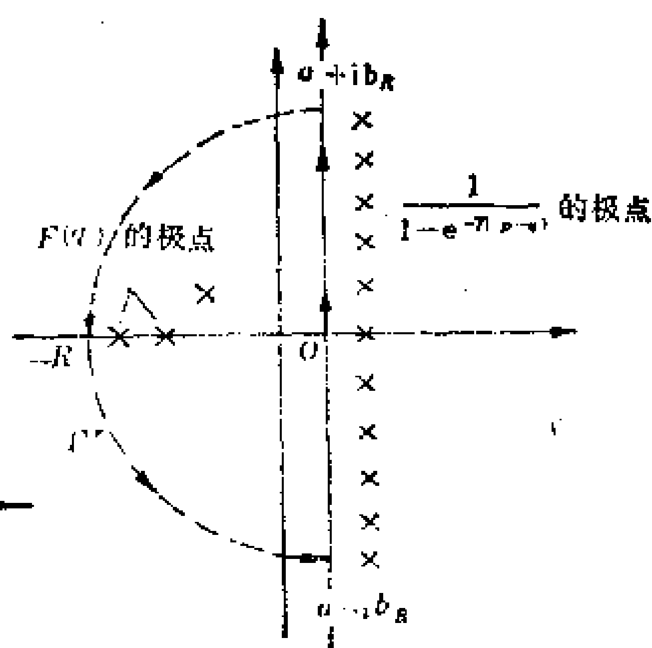


图 7.5

为了恢复频率的输入值，则如图 7.4 所示，重复频率 ω_r 必须大于或等于输入值的高频成分的频率之两倍：

$$\omega_r \geqslant 2\,\omega_0 \tag{7-24}$$

同理，如果 $F(p)$ 是有理函数，且其分母的次数比其分子的次数大两次，则如图 7.5 所示，有

$$\begin{aligned} F^*(p) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(q)}{1-e^{-T(p-q)}}dq \\ &= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma''_R}\frac{F(q)}{1-e^{-T(p-q)}}dq \\ &= \sum_{q_n}\operatorname{Res}\left(\frac{F(q)}{1-e^{-T(p-q)}},\ q_n\right). \end{aligned} \tag{7-25}$$

其中，$\{q_n\}$ 是 $F(q)$ 的所有极点。

如果 $F(p)=\dfrac{A(p)}{B(p)}$，则 $F^*(p)$ 能写成

$$F^*(p)=\sum_{q_n}\operatorname{Res}\left(\frac{A(q)}{B(q)}\cdot\frac{1}{1-e^{Tq}\cdot z^{-1}},\ q_n\right), \tag{7-26}$$

其中 q_n 是 $B(q)=0$ 的根，$z=e^{Tp}$。

特别地，如果 $B(q)$ 仅有单根，则方程(7-26)能表示成：

$$F^*(p)=\sum_{n=1}^{N}\frac{A(q_n)}{B'(q_n)}\cdot\frac{1}{1-e^{Tq_n}\cdot z^{-1}}。\tag{7-27}$$

其中 $q_1,q_2,\cdots,q_N$ 是 $B(q)=0$ 的单根，而

$$B'(q_n)=\frac{\mathrm{d}B(q)}{\mathrm{d}q}\bigg|_{q=q_n}。\tag{7-28}$$

于是由(7-26)式可知

$$F^*(p)=\mathscr{F}(z)=\mathscr{Z}[f(t)]=\sum_{n=1}^{N}\frac{A(q_n)}{B'(q_n)}\cdot\frac{1}{1-e^{Tq_n}z^{-1}}。\tag{7-29}$$

综上所示，采样函数 $f^*(t)$的拉普拉斯变换 $F^*(p)$有(7-9)、(7-23)和(7-25)或(7-29)这三种表达式，其中公式(7-9)、(7-23)、(7-25)是分别用 $f(t)$或 $f(t)$的拉普拉斯变换 $F(p)$来表达的。

例 7-2 设 $F(p)=\dfrac{1}{p(p+a)}$，求 $F^*(p)$。

解 $F^*(p)$可用公式(7-27)来求得。这里

$$A(q)=1, B(q)=q(q+a)\ q_1=0, q_2=-a,$$

$$F^*(p)=\frac{1}{a}\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{1}{-a}\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}=\frac{1}{a}\left(\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-aT}}\right)$$

$$=\frac{z(1-e^{-aT})}{a(z-1)(z-e^{-aT})},\quad z=e^{Tp}。\tag{7-30}$$

例 7-3 设 $F(p)=\dfrac{1}{(p+a)^2}$，求 $F^*(p)$。

解 根据公式(7-25)或(7-26)，则

$$F^*(p)=\mathrm{Res}\left(\frac{1}{(p+a)^2(1-e^{-T(p-q)})},\ q_1=-a\right)。$$

其中 $q_1=-a$ 是二阶极点，据留数计算公式，有

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{(p+a)^2(1-e^{-T(p-q)})},\ q_1=-a\right)$$

$$=\lim_{q\to-a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\left(\frac{1}{1-e^{-T(p-q)}}\right)=\frac{Te^{-aT}z^{-1}}{(1-z^{-1}e^{-aT})^2}。$$

故

$$F^*(p)=\frac{Te^{-aT}z}{(z-e^{-aT})^2}。\tag{7-31}$$

1.2 Z–变换的逆变换

在这一节中，我们将讨论 Z–变换的逆变换。这里主要介绍留数方法与幂级数方法。

一、留数方法

如前所述，任何脉冲系统的输出值函数，即采样函数 $f^*(t)$ 的拉普拉斯变换 $F^*(p)$ 等于 $f(t)$ 的 Z–变换，即

$$F^*(p)=\mathscr{Z}[f(t)]=\sum_{n=0}^{\infty}f(nT)z^{-n},\quad z=e^{Tp}。$$

为了求 $\mathscr{Z}[f(t)]$ 的逆变换 $\mathscr{Z}^{-1}$，即为了求序列 $\{f(nT)\}$，根据留数定义，由(7-8)可知，$f(T)$ 等于 $\mathscr{F}(z)$ 在无穷点的留数乘以负号，即

$$f(T)=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\infty^-}\mathscr{F}(z)\,dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\infty}\mathscr{F}(z)dz$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}f(nT)\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\infty}z^{-n}dz=f(T)。\tag{7-32}$$

其中 Γ_∞ 是包含 $\mathscr{F}(z)$ 的所有奇点的闭围道，但不包含无穷远点。

一般地，对 $f(nT)(n=0,1,2,\cdots)$，我们有

$$f(nT)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\infty}z^{n-1}\mathscr{F}(z)dz。\tag{7-33}$$

根据留数定理，则得

$$f(nT)=\sum_{z_k}\mathrm{Res}(\mathscr{F}(z)\cdot z^{n-1},z_k)\quad(n=0,1,2,\cdots),\tag{7-34}$$

其中，z_k 是 $\mathscr{F}(z)\cdot z^{n-1}$ 在 Γ_∞ 内的所有奇点。这就是 Z–变换的逆变换公式。

例 7-4 设

$$\mathscr{F}(z)=\frac{az}{\sin mz},$$

求 $f(nT),n=0,1,2,\cdots$。 (7-35)

解 显然，$\mathscr{F}(z)$的极点为 $z_k=\frac{k\pi}{m}(k=0,1,2,\cdots)$，它们都是一阶极点，且

$$\text{Res}(\mathscr{F}(z)\cdot z^{n-1},z_k)=\frac{a\left(\frac{k\pi}{m}\right)^n}{m\cos k\pi}。$$

于是，由公式(7-34)，则得

$$f(nT)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{a}{m}\left(\frac{k\pi}{m}\right)^n\quad(n=0,1,2,\cdots)。\tag{7-36}$$

例 7-5 设

$$\mathscr{F}(z)=\frac{z}{(z-\gamma)(z-1)^2},\tag{7-37}$$

求 $f(nT),n=0,1,2,\cdots$。

解 显然，$z=\gamma$ 是 $\mathscr{F}(z)$的一阶极点，且其留数为

$$\text{Res}\left(\frac{z^n}{(z-\gamma)(z-1)^2},\gamma\right)=\frac{\gamma^n}{(\gamma-1)^2},$$

$z=1$ 是 $\mathscr{F}(z)$的二阶极点，且其留数为

$$\text{Res}\left(\frac{z^n}{(z-\gamma)(z-1)^2},1\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z^n}{z-\gamma}\right)\Big|_{z=1}$$

$$=\frac{n}{1-\gamma}-\frac{1}{(1-\gamma)^2}。$$

于是，由公式(7-34)，则得

$$f(nT)=\frac{\gamma^n}{(\gamma-1)^2}+\frac{n}{1-\gamma}-\frac{1}{(1-\gamma)^2}。\tag{7-38}$$

二、幂级数方法

由 Z-变换公式

$$\mathscr{F}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f(nT)z^{-n}$$

可知，如果能将给定的函数 $\mathscr{F}(z)$展开成 z^{-1} 的幂级数，则 z^{-n} 项的系数即为 $f(nT)$，因此可以直接求得采样函数的序列值。

$\mathscr{F}(z)$一般可表示成两个多项式之比的形式，即

$$\mathscr{F}(z)=\frac{a_m z^m+a_{m-1}z^{m-1}+\cdots+a_1 z+a_0}{b_n z^n+b_{n-1}z^{n-1}+\cdots+b_1 z+b_0}。$$

利用长除法（用分母多项式去除分子多项式），便可得到幂级数的展开式，由级数的系数即可求得离散函数 $f^*(t)$。

例 7-6 已知 $\mathscr{F}(z)=\dfrac{Tz}{(z-1)^2}$，求其逆变换。

解 已知

$$\mathscr{F}(z)=\frac{Tz}{(z-1)^2}=T\frac{z}{z^2-2z+1}=T\frac{z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}。$$

应用长除法可得

$$\mathscr{F}(z)=T(z^{-1}+2z^{-2}+3z^{-3}+\cdots+nz^{-n}+\cdots)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(nT)z^{-n}。$$

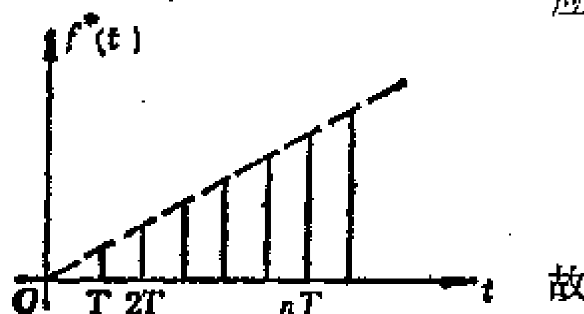


图 7.6

故

$$f^*(t)=\mathscr{Z}^{-1}\left[\frac{Tz}{(z-1)^2}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(nT)\delta(t-nT)。\qquad (7-39)$$

$f^*(t)$的图形如图 7.6 所示。

1.3 Z-变换的性质

和拉普拉斯变换相类似，Z-变换也有一些重要定理，利用这些定理可以简化求函数 $f(t)$的 Z-变换的运算。

(1) 线性变换定理　若 $\mathscr{Z}[f(t)]=\mathscr{F}(z), Z[h(t)]=\mathscr{H}(z)$，则

$$\mathscr{Z}[c_1 f(t)+c_2 h(t)]=c_1\mathscr{F}(z)+c_2\mathscr{H}(z)。\qquad (7-40)$$

这个定理可以从公式(7-8)的线性性质得到证明。

例 7-7 求 $\mathscr{Z}[\cos\omega t]$。

解 因为 $\cos\omega t=\dfrac{1}{2}(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t})$，

根据线性变换定理可得

$$\mathscr{Z}[\cos\omega t]=\mathscr{Z}\left[\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t})\right]=\frac{1}{2}[\mathscr{Z}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t})+\mathscr{Z}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t})]$$

$$=\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}。$$

(2) **时移定理** 若 $\mathscr{Z}[f(t)]=\mathscr{F}(z)$，则

$$\mathscr{Z}[f(t+T)]=z[\mathscr{F}(z)-f(0)], \tag{7-41}$$

$$\mathscr{Z}[f(t+2T)]=z^2[\mathscr{F}(z)-f(0)]-zf(T), \tag{7-42}$$

$$\mathscr{Z}[f(t-nT)\eta(t-nT)]=z^{-n}\mathscr{F}(z)。 \tag{7-43}$$

证明 (1) 由 Z-变换定义有

$$\mathscr{Z}[f(t+T)]=\sum_{n=0}^{\infty}f[(n+1)]z^{-n}$$

$$=z\sum_{n=0}^{\infty}f[(n+1)T]z^{-(n+1)}=z\sum_{k=1}^{\infty}f(kT)z^{-k}$$

其中 $k=n+1$。在上式求和符号内加、减一个 $f(0)$ 项，则得

$$\mathscr{Z}[f(t+T)]=z\left[\sum_{k=0}^{\infty}f(kT)z^{-k}-f(0)\right]$$

$$=z[\mathscr{F}(z)-f(0)]。$$

此即为(7-41)式。

(2) 若 $f(0)=0$，则得

$$\mathscr{Z}[f(t+T)]=z\mathscr{F}(z)。 \tag{7-44}$$

利用刚才所证明的公式(7-41)，可得

$$\mathscr{Z}[f(t+2T)]=\mathscr{Z}\{f[(t+T)+T]\}$$

$$=z\{\mathscr{Z}[f(t+T)]-f(t+T)|_{t=0}\}$$

$$=z^2[\mathscr{F}(z)-f(0)]-zf(T)。$$

此即为(7-42)式。显然，利用上式可推广到 $\mathscr{Z}[f(t+mT)]$，式中 m 为正整数。

(3) 由 Z-变换定义，有

$$\mathscr{Z}[f(t-nT)\eta(t-nT)]=\sum_{m=0}^{\infty}f[(m-n)T]\cdot\eta[(m-n)T]z^{-m}$$

$$=z^{-n}\sum_{m=0}^{\infty}f[(m-n)T]\eta[(m-n)T]z^{-(m-n)}$$

令 $k=m-n$，则上式变为

$$\mathscr{Z}[f(t-nT)\eta(t-nT)]=z^{-n}\sum_{k=-n}^{\infty}f(kT)\eta(kT)z^{-k}$$

$$=z^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}f(kT)z^{-k}=z^{-n}\mathscr{F}(z)$$

这就是所要证明的(7-43)式。

公式(7-43)表明，函数 $f(t)$ 在时域内延迟 n 个采样周期，对应于在 Z 域内该函数的 Z-变换乘以 z^{-n}。

例 7-8 求 $\mathscr{Z}[(t-T)^2]$。

解 根据公式(7-8)，可得

$$\mathscr{Z}(t^2)=\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3},$$

由公式(7-43)，当 $n=1$ 时，可得

$$\mathscr{Z}[(t-T)^2]=z^{-1}\mathscr{Z}(t^2)=\frac{T^2(z+1)}{(z-1)^3}。$$

(3) **频移定理** 设 $\mathscr{L}[f(t)]=F(p)$，$\mathscr{Z}[f(t)]=\mathscr{F}(z)$，则

$$\mathscr{Z}[F(p+a)]=\mathscr{F}(ze^{aT}), \tag{7-45}$$

$$\mathscr{Z}[F(p-a)]=\mathscr{F}(ze^{-aT})。 \tag{7-46}$$

证明 根据拉普拉斯变换的性质(8)(位移定理)，则得

$$\mathscr{L}^{-1}[F(p+a)]=e^{-aT}f(t),\mathscr{L}^{-1}[F(p-a)]=e^{aT}f(t)。$$

根据 Z-变换的定义，即由公式(7-8)，有

$$\mathscr{Z}[F(p+a)]=\mathscr{Z}[e^{-at}f(t)]=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-anT}f(nT)z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}f(nT)(e^{aT}z)^{-n}。$$

故

$$\mathscr{Z}[F(p+a)]=\mathscr{F}(e^{aT}z)。$$

同理，可证明(7-46)式。

(4) **初值定理** 设 $\mathscr{Z}[f(t)]=\mathscr{F}(z)$，则得

$$f(0+)=\lim_{z\to\infty}\mathscr{F}(z)。 \tag{7-47}$$

证明 由 Z-变换定义(7-8)式，有

$$\mathscr{F}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f(nT)z^{-n}=f(0)+f(T)z^{-1}+f(2T)z^{-2}+\cdots,$$

所以

$$f(0)=\lim_{z\to\infty}\mathscr{F}(z)。$$

假若 $f(0)=0$，则由公式(7-8)，同样可得

$$f(T)=\lim_{z\to\infty}z\mathscr{F}(z)。\tag{7-48}$$

(5) **终值定理** 设 $\mathscr{Z}[f(t)]=\mathscr{F}(z)$，则得

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{z\to 1}(z-1)\mathscr{F}(z)。\tag{7-49}$$

证明 由线性定理和时移定理，可得

$$\mathscr{Z}[f(t+T)-f(t)]=(z-1)\mathscr{F}(z)-zf(0)。\tag{7-50}$$

但是，由Z-变换定义可得

$$\mathscr{Z}[f(t+T)-f(t)]=\sum_{n=0}^{\infty}\{f[(n+1)T]-f(nT)\}z^{-n}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}\{f[(n+1)T]-f(nT)\}z^{-n}。$$

令 $z\to 1$，则得

$$\lim_{z\to 1}\mathscr{Z}[f(t+T)-f(t)]=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}\{f[(n+1)T]-f(nT)\}$$

$$=f(\infty)-f(0)。\tag{7-51}$$

由(7-50)式则得

$$\lim_{z\to 1}\mathscr{Z}[f(t+T)-f(t)]=\lim_{z\to 1}(z-1)\mathscr{F}(z)-f(0)。$$

于是，由(7-50)式与(7-51)式便得到终值定理，即(7-49)式。

(6) **极大值和极小值定理** 函数 $f(t)$ 的极大值或极小值能从一阶差

$$\Delta f(nT)=f[(n+1)T]-f(nT)\tag{7-52}$$

的变号这一条件找到。如果研究连续信号变量，这条件也能类似地找到。

证明 方程(7-52)的解，即

$$\Delta f(nT)=f[(n+1)T]-f(nT)=0\tag{7-53}$$

的解通常给出的 n 是非整数，但是，对极大值的实际的值 n，它必然是整数，是由解方程(7-53)所得到的整数的上界。

如果 $f(0)=0$，则由公式(7-41)得

$$\mathscr{Z}[\Delta f(nT)]=\mathscr{Z}[f(n+1)T]\}-\mathscr{Z}[f(nT)]$$
$$=\mathscr{Z}[f(t+T)]-\mathscr{Z}[f(t)]$$
$$=(z-1)\mathscr{F}(z)。$$

于是，由 Z-变换的逆变换公式(7-33)，得

$$\Delta f(nT)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{r}(z-1)\mathscr{F}(z)\cdot z^{n-1}\mathrm{d}z。\tag{7-54}$$

因而，函数 $f(t)$的极大值或极小值点将能得到，如果能首先找到 $\Delta f(nT)$的零点或最后这个积分的零点，则它们由

$$\Delta f(nT)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{r}(z-1)\mathscr{F}(z)z^{n-1}\mathrm{d}z=0\tag{7-55}$$

找到。

(7) **对第二个未知变量的微分定理** 设 $\mathscr{Z}[f(t,a)]=\mathscr{F}(z,a)$，则

$$\mathscr{Z}\left[\frac{\partial}{\partial a}f(t,a)\right]=\frac{\partial}{\partial a}\mathscr{F}(z,a)。\tag{7-56}$$

证明 根据 Z-变换定义，有

$$\mathscr{Z}\left[\frac{\partial}{\partial a}f(t,a)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial a}f(nT,a)z^{-n}=\frac{\partial}{\partial a}\sum_{n=0}^{\infty}f(nT,a)z^{-n}$$
$$=\frac{\partial}{\partial a}\mathscr{F}(z,a)。$$

于是，作为(7-56)式的直接推论，对正整数 k，有

$$\mathscr{Z}\left[\frac{\partial^k}{\partial a^k}f(t,a)\right]=\frac{\partial^k}{\partial a^k}\mathscr{F}(z,a)。\tag{7-57}$$

(8) **对第二个未知变量的极限定理** 设 $\mathscr{Z}[f(t,a)]=\mathscr{F}(z,a)$，则

$$\lim_{a\to a_0}\mathscr{Z}[f(t,a)]=\mathscr{Z}[\lim_{a\to a_0}f(t,a)]=\mathscr{Z}[f(t,a_0)]。\tag{7-58}$$

证明 由于

$$\mathscr{Z}[f(t,a)]=\sum_{n=0}^{\infty}f(nT,a)z^{-n},$$

因此

$$\lim_{a\to a_0}\mathscr{Z}[f(t,a)]=\sum_{n=0}^{\infty}\lim_{a\to a_0}f(nT,a)z^{-n},=\sum_{n=0}^{\infty}f(nT,a_0)z^{-n},$$

故(7-58)式成立。

这个极限定理在脉冲系统的计算中是常常被用到的，因而，它充当了重要的角色。

(9) 对第二个未知变量的积分定理 设 $\mathscr{Z}[f(t,a)]=\mathscr{F}(z,a)$，则

$$\int_0^a \mathscr{F}(z,a)\mathrm{d}a=\mathscr{Z}\left[\int_0^a f(t,a)\,\mathrm{d}a\right]。\tag{7-59}$$

这积分定理在估计封闭脉冲系统的均方差时是有用的。

(10) 关于改变时间比例尺的定理 设 $f(t)$关于周期 T 的 Z-变换记为 $\mathscr{Z}_T[f(t)]$，$f\left(\frac{t}{a}\right)$关于周期 aT 的 Z-变换记为 $\mathscr{Z}_{aT}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right]$，$a$ 为正实数，则成立

$$\mathscr{Z}_{aT}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right]=\mathscr{Z}_T[f(t)]。\tag{7-60}$$

习　题

1. 求 $\mathscr{Z}[a^n]$。
2. 求 $\mathscr{Z}[1-e^{-at}]$。
3. 求 $\mathscr{Z}[t^2]$。
4. 设 $\mathscr{Z}[f(t)]=\mathscr{F}(z)$，试证明：
$$\mathscr{Z}[e^{-at}f(t)]=\mathscr{F}(ze^{at})。$$
5. 已知：
$$\mathscr{F}(z)=\frac{2z^2-1}{2z^2-3z+1},$$
试求 $f(0)$及 $\lim\limits_{n\to\infty}f(nT)$。

6. 求
$$\mathscr{Z}^{-1}\left[\frac{z^2+1}{z^2-1}\right]。$$
7. 求
$$\mathscr{Z}^{-1}\left[\frac{2}{3z^2-4z+1}\right]。$$
8. 求
$$\mathscr{Z}^{-1}\left[\frac{2z^2-0.5z}{z^2-0.5z-0.5}\right]。$$

9．求

$$\mathscr{Z}^{-1}\left[\frac{1}{(z-a)^4}\right]。$$

10．求

$$\mathscr{Z}^{-1}\left[\frac{z\cdot\sin aT}{z^2-2z\cdot\cos aT+1}\right]。$$

11．求

$$\mathscr{Z}^{-1}\left[\frac{T^3z(z+1)}{2(z-1)^4}+\frac{T^3(z+2)z}{6(z-1)^3}\right]。$$

12．求

$$\mathscr{Z}^{-1}\left\{\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\cdot\frac{\partial^{m-1}}{\partial a^{m-1}}\left(\frac{z}{z-e^{-aT}}\right)\right]。$$

13．求

$$\mathscr{Z}^{-1}\left[\lim_{a\to 0}\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial a^{m-1}}\left(\frac{z}{z-e^{-aT}}\right)\right]。$$

14．求

$$\mathscr{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(z-\gamma)[(z-a)^2+\beta^2]}\right]。$$

15．试证明对第二未知变量的积分定理。

16．试证明关于改变时间比例尺的定理。

§2 Z—变换的应用

在这一节里，我们将讨论在求解具有常系数的线性差分方程、脉冲系统的传输函数和冲击脉冲射流系统的输出特性等方面的应用。

2.1 解具有常系数的线性差分方程

求解微分方程可用拉普拉斯变换法，类似地，求解差分方程可用Z-变换法。用Z-变换法，可把时域内的差分方程变换成 z 域内的代数方程，从而使求解过程大大简化。

我们考虑下述形式的线性差分方程：

$$\sum_{j=0}^{p}a_jx(n+j)=\sum_{j=0}^{q}b_jy(n+j),\tag{7-61}$$

其中，a_j 和 b_j 都是常数，x 和 y 都是时间 t 的函数，它们仅在 $t=n$时

有定义，且被看成于 $t=n$ 时发生的脉冲；y 是激励作用，对一切自然 n，$y(n)$ 是已知的，而 $x(t)$ 是要找的函数。

为了用 Z-变换求解差分方程(7-61)，首先将该式两端进行 Z-变换。为此，令

$$\mathscr{Z}[x(n)]=X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n},$$

$$\mathscr{Z}[y(n)]=Y(z)=\sum_{n=0}^{\infty}y(n)z^{-n}。$$

由方程(7-61)，则得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{p}a_j x(n+j)\right]z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{q}b_j y(n+j)\right]z^{-n}。$$

于是

$$\sum_{j=0}^{p}a_j\left[\sum_{n=0}^{\infty}x(n+j)z^{-n}\right]=\sum_{j=0}^{q}b_j\left[\sum_{n=0}^{\infty}y(n+j)z^{-n}\right]。\tag{7-62}$$

但是

$$\sum_{n=0}^{\infty}x(n+j)z^{-n}=z^j\sum_{n=0}^{\infty}x(n+j)z^{-(n+j)}=z^j\sum_{n=j}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

$$=z^j\left[\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}-\sum_{n=0}^{j-1}x(n)z^{-n}\right],$$

即

$$\mathscr{Z}[x(n+j)]=z^j\left[X(z)-\sum_{n=0}^{j-1}x(n)z^{-n}\right]。\tag{7-63}$$

因此，若 $x(0)=x(1)=\cdots=x(p)$，则

$$\mathscr{Z}[x(n+j)]=z^jX(z),\quad (j=0,1,\cdots,p)。\tag{7-64}$$

于是

$$\mathscr{Z}\left[\sum_{j=0}^{p}a_j x(n+j)\right]=\sum_{j=0}^{p}c_j z^j X(z)。\tag{7-65}$$

同理，若 $y(0)=y(1)=\cdots=y(q)=0$，则

$$\mathscr{Z}\left[\sum_{j=0}^{q}b_j y(n+j)\right]=\sum_{j=0}^{q}b_j z^j Y(z)。\tag{7-66}$$

从而，在零初始条件下，即在

$x(j)=0(j=0,1,\cdots,p)$ 和 $y(j)=0$，$(j=0,1,2,\cdots,q)$ 下，由方程(7-61)便得到

$$X(z)=\frac{B_q(z)}{A_p(z)}\cdot Y(z), \tag{7-67}$$

其中

$$A_p(z)=\sum_{j=0}^{p} a_j z^j,\quad B_q(z)=\sum_{j=0}^{q} b_j z^j. \tag{7-68}$$

于是，利用 Z-变换的反演公式(7-33)，即得

$$x(n)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{\Gamma_\infty} X(z)\cdot z^{n-1}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{\Gamma_\infty} z^{n-1}\frac{B_q(z)}{A_p(z)}Y(z)\mathrm{d}z. \tag{7-69}$$

这就是在零初始下，差分方程(7-61)的解。

当初始条件不等于零时，利用(7-63)式，由方程(7-61)可得

$$A_p(z)X(z)-A_{p-1}(z)=B_q(z)Y(z)-B_{q-1}(z), \tag{7-70}$$

其中

$$A_{p-1}(z)=\sum_{k=0}^{p} a_k\sum_{n=0}^{k-1} x(n)z^{k-n}, \tag{7-71}$$

$$B_{q-1}(z)=\sum_{k=0}^{q} b_k\sum_{n=0}^{k-1} y(n)z^{k-n}. \tag{7-72}$$

因而，我们获得

$$X(z)=\frac{B_q(z)Y(z)+A_{p-1}(z)-B_{q-1}(z)}{A_p(z)}. \tag{7-73}$$

于是，利用 Z-变换的反演公式，即得在初始条件不等于零的情况下，差分方程(7-61)的解：

$$x(n)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{\Gamma_\infty} z^{n-1}\cdot\frac{B_q(z)Y(z)+A_{p-1}(z)-B_{q-1}(z)}{A_p(z)}\mathrm{d}z. \tag{7-74}$$

因此，其求解过程与零初始条件下的(7-69)式相同，所以大多数脉冲系统可用具有零初始条件的差分方程来描述。

例 7-9 求一阶差分方程

$$x(n+1)+3x(n)=n \tag{7-75}$$

满足初始条件 $x(0)=1$ 的解。

解 设 $X(z)=\mathscr{Z}[x(n)]$。对(7-75)式两端进行 Z-变换，注意到

$\mathscr{Z}[x(n+1)]=\mathscr{Z}[X(z)-x(0)]$，则得

$$z\cdot X(z)-x(0)z+3X(z)=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{-n}$$

$$=\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}=\frac{z}{(1-z)^2}\text{。}$$

解之得

$$X(z)=\frac{z(2-2z+z^2)}{(z+3)(z-1)^2}$$

$$=\frac{z}{z+3}+\frac{z}{(z+3)(z-1)^2}\text{。}\qquad(7\text{-}76)$$

将

$$\frac{z}{(z+3)(z-1)^2}$$

展开成部分分式。设

$$\frac{1}{(z+3)(z-1)^2}=\frac{a}{z+3}+\frac{b}{z-1}+\frac{c}{(z-1)^2},$$

则

$$\begin{aligned}1&=a(z-1)^2+b(z+3)(z-1)+c(z+3)\\&=a(z^2-2z+1)+b(z^2+2z-3)+c(z+3)\\&=(a+b)z^2+(-2a+2b+c)z+(a-3b+3c)\end{aligned}$$

因此

$$a+b=0,\quad -2a+3b+c=0,\quad a-3b+3c=1\text{。}$$

解之得

$$c=\frac{1}{4},\quad b=-\frac{1}{16},\quad a=\frac{1}{16},$$

故

$$\frac{z}{(z+3)(z-1)^2}=\frac{1}{16}\frac{z}{(z+3)}-\frac{1}{16}\left(\frac{z}{z-1}\right)+\frac{1}{4}\frac{z}{(z-1)^2}\text{。}$$

于是

$$X(z)=\frac{17}{16}\frac{z}{(z+3)}-\frac{1}{16}\left(\frac{z}{z-1}\right)+\frac{1}{4}\frac{z}{(z-1)^2}\text{。}\qquad(7\text{-}77)$$

利用公式

$$\mathscr{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-1}\right]=1,\quad \mathscr{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(z-1)^2}\right]=n,$$

和

$$\mathscr{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z+3}\right]=(-3)^n,$$

这是因为

$$\frac{z}{z+3}=\frac{1}{1+\frac{3}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-3)^n z^{-n},$$

对(7-77)式进行反演变换，则得差分方程(7-75)满足 $x(0)=1$的解为

$$x(n)=\frac{1}{16}[17(-3)^n+4n-1]。\tag{7-78}$$

下面我们直接利用反演公式求(7-76)式的逆变换。据 Z-变换的反演公式(7-33)，有

$$\begin{aligned}x(n)&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} z^{n-1}X(z)dz\\&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\left[\frac{z^n}{(z+3)}+\frac{z^n}{(z+3)(z-1)^2}\right]dz\\&=(-3)^n+\mathrm{Res}\left(\frac{z^n}{(z+3)(z-1)^2},-3\right)\\&\quad+\mathrm{Res}\left(\frac{z^n}{(z+3)(z-1)^2},1\right)\\&=(-3)^n+\frac{(-3)^n}{(-4)^2}+\frac{4n-1}{4^2}\\&=\frac{1}{16}[17(-3)^n+4n-1],\end{aligned}$$

其中

$$\mathrm{Res}\left(\frac{z^n}{(z+3)(z-1)^2},1\right)=\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^n}{z+3}\right)=\frac{4n-1}{16}.$$

可见有时利用反演公式直接进行计算反倒简便。

例 7-10 用 Z-变换法解下述差分方程：

$$x(n+2)+3x(n+1)+2x(n)=0。\tag{7-79}$$

已知：$x(0)=0, x(1)=1$。

解 将方程(7-79)的两端取 Z-变换，可得

$$z^2X(z)-z^2x(0)-zx(0)+3zX(z)-3x(0)z+2X(z)=0,$$

将上式代入已知条件并进行简化，得

$$X(z)=\frac{z}{z^2+3z+2}=\frac{z}{(z+2)(z+1)}=\frac{z}{z+1}-\frac{z}{z+2}\text{。}$$

利用 Z-变换的反演公式(7-33)，得

$$\begin{aligned}x(n)&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{T_\infty}\frac{z^n}{(z+2)(z+1)}dz\\&=\mathrm{Res}\left(\frac{z^n}{(z+2)(z+1)},-1\right)+\mathrm{Res}\left(\frac{z^n}{(z+2)(z+1)},-2\right)\\&=(-1)^n-(-2)^n\quad(n=0,1,2,\cdots)\end{aligned}\tag{7-80}$$

此外，我们也可用下述方法求得 $x(n)$。

由 $\mathscr{Z}[a^n]=\frac{z}{z-a}$，可得

$$\mathscr{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z+1}\right]=(-1)^n,\quad \mathscr{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z+2}\right]=(-2)^n\text{。}$$

因此，$x(n)=(-1)^n-(-2)^n\ (n=0,1,2,\cdots)$。

2.2 脉冲系统的传递函数

显然，从脉冲系统的定义可知，系统所获得的信息是离散的，而且是周期的。典型的线性脉冲系统如图 7.7 所示。

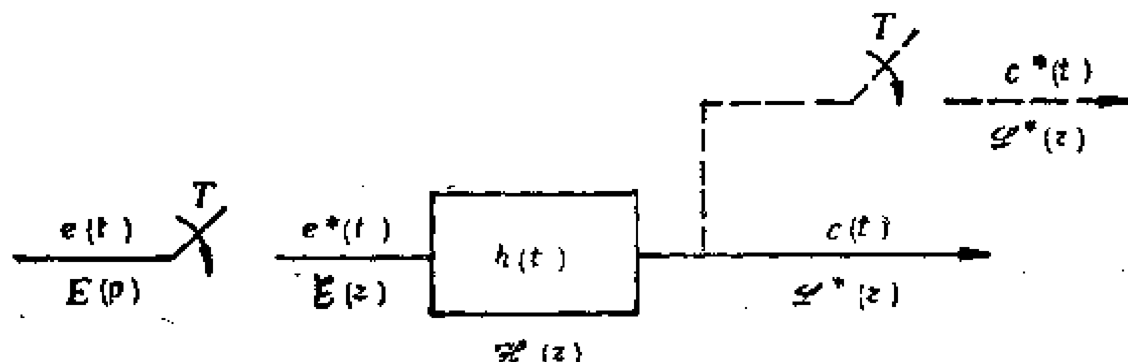


图 7.7

其中，$h(t)$是系统的权函数，且当 $t<0$ 时，$h(t)=0$；$e^*(t)=\sum_{n=0}^{\infty}e(t)\delta(t-nT)$，$c(t)$ 是线性系统的输出值，它是时间的连续函数。但是，为了简化研究，我们假定：为了得到输出口的脉冲输出值，设置一个假想的（虚构的）脉冲元素，它与输入的脉冲元素是同步的，$c^*(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c(nt)\delta(t-nT)$。 (7-81)

上述限制为了使反作用在瞬间存在，这个限制在研究变形的 Z-变换时将取消。

因为系统是线性的，脉冲系统的输出值$c(t)$能按下列方式叠加的方法获得，图 7.8 给出了系统输出口的典型特征。在任何时刻 t，输出值 $c(t)$为

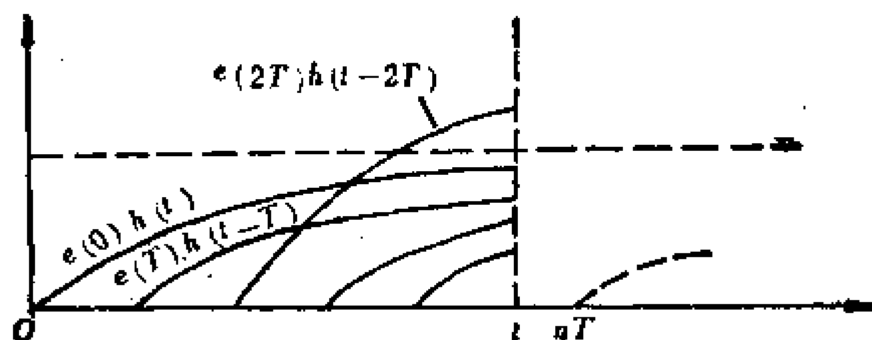


图 7.8

$$c(t)=e(0)h(t)+e(T)h(t-T)+e(2T)h(t-2T)$$
$$+\cdots+e(nT)h(t-nT)=\sum_{k=0}^{n}e(kT)h(t-kT)。$$

由于当 $k>n$ 时（因 ($t\leqslant nT$)

$$h(t-kT)=0,$$

则 $c(t)$可表示成

$$c(t)=\sum_{k=0}^{\infty}e(kT)h(t-kT)。\quad (7\text{-}82)$$

特别地

$$c(nT)=\sum_{k=0}^{\infty}e(kT)h[(n-k)T]。\quad (7\text{-}83)$$

于是

$$c^*(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c(nT)\delta(t-nT)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}e(kT)\,h[(n-k)T]\right\}\delta(t-nT)。$$

在上式中交换求和次序，则得

$$c^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}e(kT)\left\{\sum_{n=0}^{\infty}h[(n-k)\,T]\delta(t-nT)\right\}。\qquad(7\text{-}84)$$

对上式两端进行拉普拉斯变换，并设 $m=n-k$，得到

$$\mathscr{L}[c^*(t)]=\sum_{k=0}^{\infty}e\,(kT)\left\{\sum_{m=-k}^{\infty}h(mT)\,e^{-(m+k)T}\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}e\,(kT)\,e^{-kTp}\sum_{m=0}^{\infty}h(mT)e^{-mTp}。$$

因为 $h(mT)=0(m<0)$。令 $z=e^{Tp}$，则得

$$\mathscr{L}[\mathscr{C}^*(t)]=\mathscr{C}^*(k)=\mathscr{C}(z)=\mathscr{E}(z)\cdot\mathscr{H}(z),\qquad(7\text{-}85)$$

或者

$$\mathscr{H}(z)=\frac{\mathscr{C}(z)}{\mathscr{E}(z)}。\qquad(7\text{-}86)$$

其中

$$\mathscr{E}(z)=\mathscr{Z}[e(t)],\ \mathscr{H}(z)=\mathscr{Z}[h(t)]。\qquad(7\text{-}87)$$

$\mathscr{H}(z)$称为脉冲系统的冲击传输函数，它联系着输入值与 输出值的 Z-变换 $\mathscr{E}(z)$与 $\mathscr{C}(z)$，脉冲系统的数学表示式如图 7.9 所示。

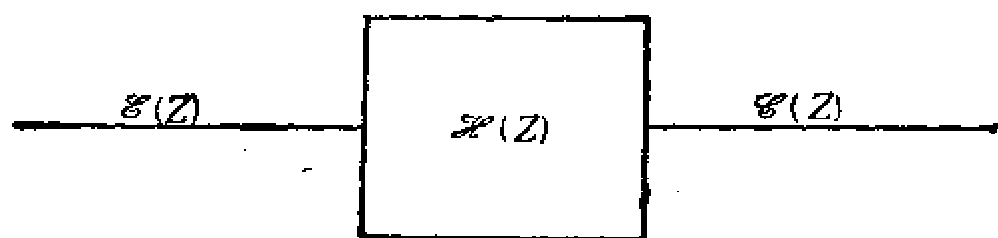


图 7.9

关系式(7-85)也能由另外的途径得到。对关系式(7-82)的两端进行拉普拉斯变换，则得

$$C\,(p)=\mathscr{L}[c(t)]=\sum_{k=0}^{\infty}e(kT)\mathscr{L}[h(t-kT)]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}e(kT)e^{-kTp}H(p)=\mathscr{E}(e^{Tp})H(p)。\qquad(7\text{-}88)$$

但是，根据关系式(7-9)和(7-23)，有

$$\mathscr{H}(z)=H^*(p)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}H(p+\mathrm{i}n\omega_r),\tag{7-89}$$

$$\mathscr{C}(z)=C^*(p)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}C(p+\mathrm{i}n\omega_r)\tag{7-90}$$

于是，由(7-90)式、(7-88)式和(7-89)式，并注意到$T\omega_r=2\pi$，便得到

$$\mathscr{C}(z)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathscr{E}(\mathrm{e}^{Tp+2n\pi\mathrm{i}})H(p+\mathrm{i}n\omega_r)$$

$$=\mathscr{E}(z)\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}H(p+\mathrm{i}n\omega_r)=\mathscr{E}(z)\mathscr{H}(z)。$$

下面我们来讨论冲击传输函数$\mathscr{H}(z)$的求法和基本性质。

一、关于冲击传输函数$\mathscr{H}(z)$的求法

如果

$$H(p)=\mathscr{L}[h(t)]=\frac{A(p)}{B(p)},\tag{7-91}$$

其中，$A(p)$与$B(p)$都是多项式，且$B(p)$的次数比$A(p)$的次数大两次。若$q_1,q_2,\cdots,q_N$是$B(p)=0$的单根，根据公式(7-29)，则得

$$\mathscr{H}(z)=\sum_{n=1}^{N}\frac{A(q_n)}{B'(q_n)}\cdot\frac{1}{1-\mathrm{e}^{Tq_n}z^{-1}},\tag{7-92}$$

若$q_1,q_2,\cdots,q_n$是$H(p)$的所有极点（其阶分别为$n_1,n_2,\cdots,n_N$），则根据公式(7-34)，得

$$\mathscr{H}(z)=\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Res}\left(\frac{A(q)}{B(q)}\frac{1}{1-\mathrm{e}^{Tq_k}z^{-1}},q_n\right),\tag{7-93}$$

其中

$$\mathrm{Res}\left(\frac{A(q)}{B(q)}\frac{1}{1-\mathrm{e}^{Tq}z^{-1}},q_k\right)$$

$$=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{q\to q_n}\frac{\mathrm{d}^{n_k-1}}{\mathrm{d}q^{n_k-1}}\left\{(q-q_k)^{n_k}\frac{B(q)}{B(q)}\frac{1}{1-\mathrm{e}^{Tq}z^{-1}}\right\}。\tag{7-94}$$

二、关于冲击传输函数的性质

脉冲系统的性质主要依赖于与脉冲有关的冲击传输函数$\mathscr{H}(z)$，它具有下列性质：

(1) $\mathscr{H}(z)$是以$\mathrm{i}\frac{2\pi}{T}$为周期的，即

$$\mathscr{H}\left(\mathrm{e}^{T\left(p+\mathrm{i}\frac{2\pi}{T}k\right)}\right)=\mathscr{H}(\mathrm{e}^{Tp})\quad(k=0,1,2,\cdots)。\qquad(7\text{-}95)$$

事实上，由于e^{Tp}是以$\mathrm{i}\frac{2\pi}{T}$为周期的，因此

$$\mathrm{e}^{T\left(p+\mathrm{i}\frac{2k\pi}{T}\right)}=\mathrm{e}^{Tp}\,(k=0,1,2,\cdots)。$$

故(7-95)式显然成立。

(2) 当$p\to0$和$p\to\mathrm{i}\frac{\omega_r}{2}$时，$\mathscr{H}(z)$渐近地趋于实值。

事实上，当$p\to0$时，$z=\mathrm{e}^{Tp}\to1$；当$p\to\mathrm{i}\frac{\omega_r}{2}$时，$z\to\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=-1\left(因\ \omega_r=\frac{2\pi}{T}\right)$。此时，由公式(7-92)可知

$$\mathscr{H}(1)=\sum_{n=1}^{N}\frac{A(q_n)}{B'(q_n)}\frac{1}{1-\mathrm{e}^{Tq_n}},\qquad(7\text{-}96)$$

$$\mathscr{H}(-1)=\sum_{n=1}^{N}\frac{A(q_n)}{B'(q_n)}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{Tq_n}}。\qquad(7\text{-}97)$$

由于在实际系统中，$A(p)$与$B(p)$都是实系数多项式，$B(p)$的根或是实根或是成对的互为共轭的复根。因此，由(7-96)式与(7-97)式可知，$\mathscr{H}(1)$和$\mathscr{H}(-1)$都是实数。同时，由公式(7-93)出发，也得到$\mathscr{H}(1)$和$\mathscr{H}(-1)$都是实数。故这性质(2)是成立的。

(3) $\mathscr{H}(z)$的分母关于z^{-1}的多项式的次数等于$H(p)$的分母关于p的多项式的次数。这是因为(7-92)式和(7-93)式中加项的数目等于多项式$B(p)$的次数，即为N。

(4) 在p平面上，$H^*(p)$的极点也是$H(p)$的极点。

事实上，由于$H^*(p)=\mathscr{H}(\mathrm{e}^{Tp})$，而由关系式(7-92)或(7-93)可知，$H^*(p)$的极点恰好是使

$$1-\mathrm{e}^{Tq_n}\mathrm{e}^{-Tp}=0\quad(n=1,2,\cdots,N)$$

的根，即$p=q_1,q_2,\cdots,q_N$。这就是我们所要证明的。

(5) $H(p)$的极点的改变将改变$\mathscr{H}(z)$的表达式中的项 $\dfrac{1}{1-e^{Tq_n}\cdot z^{-1}}$ 及其系数。

从(7-92)式或(7-93)式，这是明显的。

(6) $H(p)$中的零点只能改变$\mathscr{H}(z)$表达式中加项

$$\frac{1}{1-e^{Tq_n}\cdot z^{-1}}$$

的系数的值。

(7) $H(p)$中极点个数的增加将增加$\mathscr{H}(z)$中加项的数目，这意味着N更大和$\mathscr{H}(z)$将有更多的加项，且其形式为

$$\frac{A(q_n)}{B'(q_n)(1-e^{Tq_n}\cdot z^{-1})}。$$

最后，我们指出，从基本关系式(7-86)出发，我们能找到任何开的或闭的线性系统的冲击传输函数$\mathscr{H}(z)$。下面我们给出对于传输函数之各种结构形式的Z-变换表。

Z-变换表

$F(p)$	$F^*(z)$	$f(nT)$
e^{-kTp}	z^{-k}	$\delta((n-k)T)$
$1/p$	$z/(z-1)$	
$1/(p+a)$	$z/(z-e^{-aT})$	$\frac{1}{e^{-anT}}$
$\frac{1}{p^2}$	$Tz/(z-1)^2$	Tn
$1/p^2(p+a)$	$\frac{\frac{T}{a}z}{(z-1)^2}-\frac{(1-e^{-aT})z}{a^2(z-1)(z-e)}aT$	$\frac{1}{a}(Tn)-\frac{1-e^{-aTn}}{a^2}$
$\frac{a^2}{p(p^2+a^2)}$	$1-\cos aT\frac{(1+z)z}{(z-1)(z^2-2z\cos aT+1)}$	$(1-\cos aTn)$
$\frac{a}{p^2+a^2}$	$\frac{z\sin aT}{z^2-2z\cos aT+1}$	$\sin(aTn)$
$1/p^3$	$T^2z(z+1)/2(z-1)^3$	$\frac{1}{2}(Tn)^2$

$F(p)$	$F^*(z)$	$f(nT)$
$1/p^4$	$\frac{T^3z(z+1)}{2(z-1)^4}+\frac{T^3(z+2)z}{6(z-1)^3}$	$\frac{1}{3!}(Tn)^3$
$1/p^5$	$\frac{T^4z}{24}\cdot\frac{(z^3+1)+11z(z+1)}{(z-1)^5}$	$\frac{1}{4!}(Tn)^4$
$1/p^2(p^2+a^2)$	$\frac{3T}{a^2(z-1)^2}-\frac{z\sin aT}{a^3(z^3-2z\cos aT+\ )}$	$\frac{1}{a^2}(Tn)-\frac{1}{a^3}\sin(aTn)$
$1/(p+a)^2(p^2+b^2)$	$\frac{2az}{(a^2+b^2)^2(z-e^{-aT})}+$	$\frac{1}{b(a^2+b^2)}\sin(bTn-\psi)+$
	$+\frac{Te^{-aT}}{(a^2+b^2)(z-e^{-aT})^2}+$	$+\left[\frac{1}{a^2+b^2}Tn+\right.$
	$+\frac{z[\sin(bT+2\theta)-z\sin 2\theta]}{b(a^2+b^2)(z^2-2z-bT+1)}$	$\left.+\frac{2a}{(a^2+b^2)^2}\right]e^{-aTn}$
	$\theta=\mathrm{arctg}\,(b/a)$	$\psi=2\,\mathrm{arctg}(b/a)$
$1/(p+a)^m$	$\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial a^{m-1}}\left(\frac{z}{z-e^{-aT}}\right)$	$\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}(e^{-aTn})}{\partial a^{m-1}}$
	$\lim\limits_{a\to 0}\frac{(-1)^m}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial a^{m-1}}\left(\frac{z}{z-e^{-aT}}\right)$	$\lim\limits_{a\to 0}\frac{(-1)^m}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}(e^{-aTn})}{\partial a^{m-1}}$
$F(p+a)$	$F^*(e^{aT}z)$	$e^{-aTn}f(Tn)$
$\prod\limits_{j=1}^{m}[1+\tau_1(j-1)p]\times$	$\frac{1}{a}\frac{Tz}{(z-1)^2}-\frac{z}{a^2(z-1)}\frac{1-e^{-aT}}{z-e^{-aT}}\times$	
$p^2(p+a)\prod\limits_{j=1}^{m}(1+\tau_2 jp)$	$\times\frac{1-a\tau_1}{1-a\tau_2}\cdots\frac{1-a\tau_1 m-1}{1-a\tau_2 m}-$	
	$-\frac{\tau_2}{a}\frac{z}{(z-1)}\frac{1-e^{-T/\tau_2}}{z-e^{-T/\tau_2}}\times\frac{1-\tau_1/\tau_1}{1-\tau_1/\tau_2 a}$	
	$\cdots\frac{1-\tau_1(m-1)/\tau_2}{1-\tau_1/\tau_2 a}-\frac{\tau_2 m}{a}\frac{z}{z-1}\times$	
	$\times\frac{1-e^{-T/\tau_2 m}}{z-e^{-T/\tau_2 m}}\times\frac{1-\tau_1/\tau_2 m}{1-1/\tau_2 ma}\cdots$	
	$\frac{1-\tau_2 m-1/\tau_2 m}{1-\tau_2 m-2/\tau_2 m}$	
$p/(p^2+a^2)$	$\frac{z(z-\cos aT)}{z^2-2z\cos aT+1}$	$\cos(aT_n)$
$a/[(p+a)^2+a^2]$	$ze^{-aT}\sin aT$	$e^{-aTn}\sin(aTn)$

（续表）

$F(p)$	$F^*(z)$	$f(nT)$
	$z^2-2\,e^{-\alpha T}z\cos\alpha T+e^{-2\alpha T}$	$e^{-\alpha Tn}\sin(\alpha Tn)$
$1/(p^2-\beta^2)p^2$	$\frac{-z}{(2\beta^3)(z-e^{-\beta T})}+\frac{z}{(2\beta^3)(z-e^{\beta T})}-\frac{zT}{\beta^2(z-1)^2}$	
$\frac{k\pi/T}{p^2+(k\pi/T)^2}$	0	
$\frac{\pi/T}{p^2+(\pi/T)^2}$	0	
$\frac{\pi/T}{(p+a)^2+(\pi/T)^2}$	0	
$\frac{p+a}{(p+a)^2+(\pi/T)^2}$	$\frac{z}{z+e^{-aT}}$	
$\frac{p+a}{(p+a)^2+(\pi/T)^2}$	$\frac{z}{z+e^{-aT}}$	
	$\frac{z}{[z-e^{-aT}][z-e^{-bT}]}$	$\frac{e^{-aTn}-e^{-bTn}}{e^{-aT}-e^{-bT}}$
	$\frac{z(a+bz)}{[(z-\alpha)^2+\beta^2](z-1)}$	$\frac{a+b}{(1-\alpha)^2+\beta^2}+\frac{[(a+b\alpha)^2+(b\beta)^2]^{\frac{1}{2}}}{\beta[(\alpha-1)^2+\beta^2]^{\frac{1}{2}}}\times[\alpha^2+\beta^2]^{n/2}\,\mathrm{sim}\,(n\theta+\phi+\lambda)$ $\theta=\mathrm{arctg}\beta/\alpha$ $\phi=-\mathrm{arc\,tg}\frac{\beta}{(\alpha-1)}$ $\lambda=\mathrm{arctg}\frac{b\beta}{(a+b\alpha)}$
	$\frac{z}{(z-\gamma)[(z-\alpha)^2+\beta^2]}$	$\frac{\gamma^n}{(\gamma-\alpha)^2+\beta^2}+\frac{1}{\beta[(\alpha-\gamma)^2+\beta^2]^{1/2}}\times(\alpha^2+\beta^2)^{n/2}\sin(n\theta+\psi)$

$F(p)$	$F^*(z)$	$f(nT)$
		$\theta=\operatorname{arctg}\beta/\alpha$ $\psi=\operatorname{arctg}\frac{\beta}{(\alpha-\gamma)}$
	$\frac{z}{(z-1)(z-\gamma)[(z-\alpha)^2-\beta^2]}$	$\frac{1}{(1-\gamma)[(1-\alpha)^2+\beta^2]}$ $+\frac{[\alpha^2+\beta^2]^{n/2}\sin(n\theta+\psi+\lambda)}{\beta[(\alpha-\gamma)^2+\beta^2]^{\frac{1}{2}}[(\alpha-1)^2+\beta^2]^{\frac{1}{2}}}$ $+\frac{\gamma^n}{(\gamma-1)[(\gamma-\alpha)^2+\beta^2]}$ $\theta=\operatorname{arc\,tg}\beta/\alpha$ $\psi=-\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{(\alpha-1)}$ $\lambda=-\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{(\alpha-\gamma)}$
	$\frac{z(z+a_0)}{(z-1)(z-\gamma)[(z-\alpha)^2+\beta^2]}$	$\frac{(1+a_0)}{(1-\gamma)[(1-\alpha)^2+\beta^2]}$ $+\frac{(\gamma+a_0)\gamma^n}{(\gamma-1)[(\gamma-\alpha)^2+\beta^2]}$ $+\frac{[\alpha^2+\beta^2]^{n/2}[(a_0+\alpha)^2+\beta^2]^{\frac{1}{2}}}{\beta[(\alpha-1)^2+\beta^2]^{\frac{1}{2}}[(\alpha-\gamma)^2+\beta^2]^{\frac{1}{2}}}$ $\times\sin(n\theta+\psi+\lambda)$ $\theta=\operatorname{arc\,tg}\beta/\alpha$ $\psi=\psi_1+\psi_2$ $\psi_1=-\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{(\alpha-1)}$ $\psi_2=-\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{(\alpha-\gamma)},\lambda=\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{(a_0+\alpha)}$
	$\frac{z}{(z-\gamma)(z-1)^2}$	$\frac{\gamma}{(\gamma-1)^2}+\frac{n}{(1-\gamma)}-\frac{1}{(1-\gamma)^2}$
	$\frac{z(z+a_0)}{(z-\gamma)(z-\gamma)^2}$	$\frac{\gamma+a_0}{(\gamma-1)^2}\gamma^n$

（续表）

$F(p)$	$F^*(z)$	$f(nT)$
		$+\left[\frac{1+a_0}{1-\gamma}n+\frac{1}{1-\gamma}-\frac{a_0+1}{(1-\gamma)^2}\right]$
	$\frac{z}{(z-\gamma)^2(z-1)^3}$	$\frac{n\gamma^{n-1}}{(\gamma-1)^3}-\frac{3\gamma^n}{(\gamma-1)^4}$ $+\frac{1}{2}\left[\frac{n(n-1)}{(1-\gamma)^2}-\frac{4n}{(1-\gamma)^3}\right.$ $\left.+\frac{6}{(1-\gamma)^4}\right]$
	$\frac{z(z+a_0)}{(z-\gamma)^2(z-1)^2}$	$\frac{(\gamma+a_0)n\gamma^{n-1}+\gamma^n}{(\gamma-1)^2}-\frac{2\gamma^n(\gamma+a_0)}{(\gamma-1)}$ $+\frac{n(1+a_0)+1}{(1-\gamma)}\frac{2(1+a_0)}{(1-\gamma)}$
	$a+\frac{1}{T}\ln\left(\frac{z-e^{-aT}}{z-1}\right)$	$\left(\frac{1-e^{-aTn}}{nT}\right)$
	$\frac{z}{z+a}$	$a^n\cos\pi n$
	$\frac{z}{z+e^{-aT}}$	$e^{-aTn}\cos\pi n$
	$\frac{z(z-e^{-aT}\cos aT)}{z^2-2ze^{-aT}\cos aT+e^{-2aT}}$	$e^{-aTn}\cos(aTn)$

2.3 冲击脉冲射流系统的输出特性

脉冲射流，特别是共振脉冲射流比定常连续冲蚀射流有更大的冲击力。共振脉冲射流在喷嘴处的峰值压力可比输入的峰值压力提高二、三倍，将这种技术用于采掘时，可以对采掘面施加极高的打击力，因此有较高的采掘速率或破碎率。在这节里，我们将利用流体管路的传输理论和 Z- 变换方法，对粘性流体或理想流体的均匀单管脉冲射流的瞬态特性进行分析。

我们考虑横截面积为 A 的均匀单管，如图 7.10 所示。

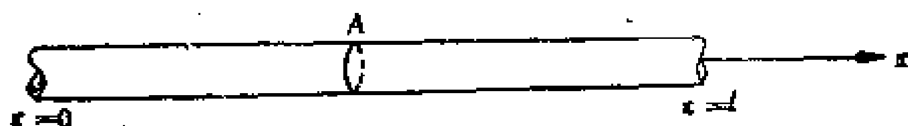


图 7.10

设 $p(x,t)$ 和 $q(x,t)$ 分别表示管中点 x 处的瞬时压力和质量流量。我们知道，在线性化的条件下，它们满足下列基本方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial p}{\partial x}=-\left(L\dfrac{\partial q}{\partial t}+Rq\right),\\[2ex]\dfrac{\partial q}{\partial x}=-\left(C\dfrac{\partial p}{\partial t}+Gp\right),\end{cases}\tag{7-98}$$

其中，$L=\dfrac{1}{A}$, $C=A/a^2$, $R=8\pi\mu/\rho A^2$, G 分别表示单位管长的流感、流容、流阻和流漏，a 为扰动波在管道中的传播速度，μ 为流体粘性系数，ρ 为流体密度。

设 $p(x,t)$ 和 $q(x,t)$ 的拉普拉斯变换为 $P(s,x)$, $Q(s,x)$，即

$$P(s,x)=\int_0^\infty e^{-st}p(x,t)dt,\quad Q(s,x)=\int_0^\infty e^{-st}q(x,t)dt。$$

对方程组(7-98)进行拉普拉斯变换，在零初始条件 $p(x,0)=0$, $q(x,0)=0$ 下，方程组(7-98)化为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial P}{\partial x}=-(Ls+R)Q,\\[2ex]\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-(Cs+G)P.\end{cases}\tag{7-99}$$

我们熟知其通解为

$$\begin{cases}P(s,x)=A_1e^{-\lambda(s)x}+A_2e^{\lambda(s)x},\\[2ex]Q(s,x)=\dfrac{1}{Z_C(s)}(A_1e^{-\lambda(s)x}-A_2e^{\lambda(s)x}),\end{cases}\tag{7-100}$$

其中

$$\lambda(s)=\sqrt{(Ls+R)(Cs+G)},\quad Z_C(s)=\sqrt{(Ls+R)/(Cs+G)}\tag{7-101}$$

分别表示传播因子和特性阻抗。若边界条件为

$$\begin{aligned}&P(s,0)=P_1(s),\ Q(s,0)=Q_1(s);\\&P(s,l)=P_2(s),\ Q(s,l)=Q_2(s).\end{aligned}\tag{7-102}$$

则得

$$\begin{cases} P(s,x)=P_1(s)\operatorname{ch}\lambda(s)x-Z_C(s)Q_1(s)\operatorname{sh}\lambda(s)x, \\ Q(s,x)=-\dfrac{P_1(s)}{Z_C(s)}\operatorname{sh}\lambda(s)x+Q_1(s)\operatorname{ch}\lambda(s)x。\end{cases} \tag{7-103}$$

设始端($x=0$)和终端($x=l$)的阻抗分别为

$$Z_1(s)=\frac{P_1(s)}{Q_1(s)}, \quad Z_2(s)=\frac{P_2(s)}{Q_2(s)}, \tag{7-104}$$

那么由方程组(7-103)易知

$$Z_2(s)=\frac{Z_1\operatorname{ch}\lambda(s)l-Z_C(s)\operatorname{sh}\lambda(s)l}{-Z_1\operatorname{sh}\lambda(s)l+Z_C(s)\operatorname{ch}\lambda(s)l}\cdot Z_C(s) \tag{7-105}$$

$$P_2(s)=G(s)P_1(s), \tag{7-106}$$

其中

$$G(s)=\frac{Z_2}{\operatorname{ch}\lambda(s)l+Z_C(s)\operatorname{sh}\lambda(s)l} \tag{7-107}$$

称为传输函数。

不难证明，在边界条件

$$\begin{cases} P(s,0)=P_0(s)-Z_0Q(s,0), \\ P(s,l)=Z_2Q(s,l) \end{cases} \tag{7-108}$$

下，方程(7-106)仍然成立，即传输函数 $G(s)$ 与边界条件无关。方程(7-106)表明了连续射流系统的输出压力与输入压力间的关系。

设始端的输入压力 $p(0,t)=p_1(t)$，其拉普拉斯变换为 $P_1(s)$。对上述管系若输入以 T_1 为周期的脉冲，即输入信号序列为 $\{p_1(nT_1)\}$ ($n=1,2,\cdots$)，即始端的压力为

$$p_1^*(t)=\sum_{n=0}^{\infty}p_1(nT_1)\delta(t-nT_1), \tag{7-109}$$

其中 $\delta(t)$ 为冲击函数，则上述连续系统就成为冲击脉冲射流系统，如图 7.11 所示。

由于方程组(7-99)关于 $P(s,x)$ 和 $Q(s,x)$ 是线性可知的，且 $\delta(t)$ 的拉普拉斯变换为 1，则由方程(7-106)及拉普拉斯变换的延迟定理，得

$$P_2(s)=G(s)P_1^*(e^{T_1s}), \tag{7-110}$$

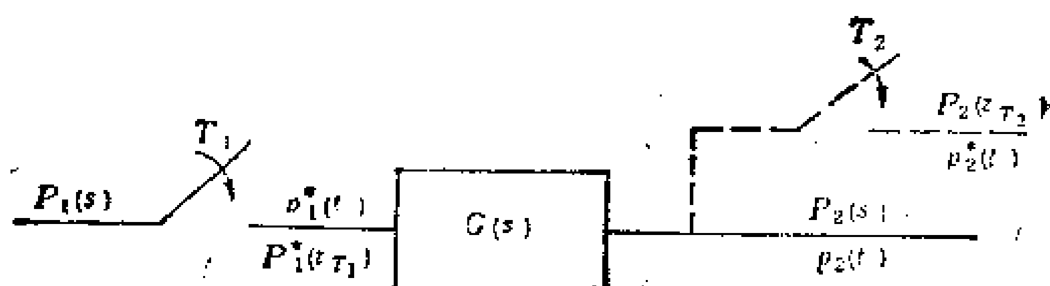


图 7.11

其中

$$P_1^*(z)=P_1^*(e^{T_1s})=\sum_{n=0}^{\infty}p(nT_1)z_1^{-n}\quad(z=e^{T_1s})\tag{7-111}$$

称为 $p_1(t)$的 Z-变换，记为 $\mathscr{Z}[p_1(t)]=\sum_{n=0}^{\infty}p_1(nT_1)z_1^{-n}$。

设 $p_2(t)=\mathscr{L}^{-1}[P_2(s)]$，$g(t)=\mathscr{L}^{-1}[G(s)]$，

又设它们关于输出周期为 T_2 的 Z-变换分别为

$$P_2^*(z)=\mathscr{Z}[p_2(t)],\quad G^*(z)=\mathscr{Z}[g(t)],\quad z_2=e^{T_2s},$$

且设 $p_1(t)=p_0\eta(t)$，则

$$P_1^*(z)=\frac{p_0}{1-z_1^{-1}}\quad(z_1=e^{T_1s})。\tag{7-112}$$

若 $T_1=kT_2, k=1,2,\cdots$，则 $P_1^*(z)$又可改写成

$$P_1^*(z)=\frac{p_0}{1-z_2^{-k}}\quad(z_2=e^{T_2s})。\tag{7-113}$$

此时(7-110)式便成为

$$P_2(s)=G(s)P_1^*(z_2)\quad(z_2=e^{T_2s})。\tag{7-114}$$

由于

$$P_2^*(z_2)=\frac{1}{T_2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_2(s+\mathrm{i}n\omega_{T_2})$$

$$G^*(z_2)=\frac{1}{T_2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}G(s+\mathrm{i}n\omega_{T_2}),$$

式中 $z_2=e^{T_2s}$，$\omega_{T_2}=2\pi/T_2$，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$。由关系式(7-114)，并注到

$$e^{T_2(s+\mathrm{i}n\omega_{T_2})}=e^{T_2s}=z_2,$$

便得

$$P_2^*(z_2)=G^*(z_2)P_1^*(z_2) \quad (z_2=e^{T_2 s})。 \tag{7-115}$$

下面，我们先来求 $G^*(z)$。由于在高压射流系统中，喷嘴的管径是很细小的，所以可近似地假定终端阻抗 $z_2=\infty$。在此条件下，则 $G(s)=1/\operatorname{ch}\lambda(s)l$。根据 Z-变换的计算公式，得

$$G^*(z)=\sum_{s_n}\operatorname{Res}\left(\frac{G(q)}{1-e^{T_2 q}\cdot z_2^{-1}},\ q=s_n\right), \tag{7-116}$$

其中 $\{s_n\}$ 是 $G(s)$ 的所有极点。易知

$$s_n=-\alpha\pm\beta_n \quad (n=0,1,2,3,\cdots),$$

$$\alpha=\frac{R}{2L},\quad \beta_n=\sqrt{\alpha^2-\frac{1}{LC}\left(\frac{2n+1}{2l}\right)^2\pi^2}。$$

因此，根据留数计算公式，经计算便得

$$G^*(z)=\sum_{s_n}[F(s_n)(1-e^{T_2 s_n}\cdot z_2^{-1})]^{-1} \quad (z_2=e^{T_2 s}), \tag{7-117}$$

其中

$$F(s_n)=\pm(-1)^n\frac{2l^2\beta_n}{a^2(2n+1)\pi}。$$

若设

$$G_N^*(z)=\sum_{n=0}^{N}[F(s_n)(1-e^{T_2 s_n}\cdot z_2^{-1})]^{-1},$$

显然

$$\lim_{N\to\infty}G_N^*(z_2)=G^*(z_2)。$$

于是根据 Z-变换的反演公式，若 $p_2(0)=g(0)\ p_1(0)=0$，则

$$\begin{aligned}\Delta p_2^*(mT_2)&=p_2((m+1)T_2)-p_2(mT_2)\\&=\lim_{N\to\infty}\frac{p_0}{2\pi i}\oint_{R_\infty}G_N^*(z)\left(\frac{z-1}{1-z^{-k}}\right)z^{m-1}dz\\&=p_0\sum_{s_n}\left\{\frac{(1-e^{T_2 s_n})e^{(m+1)T_2 s_n}+e^{\left(m-1-\left[\frac{m}{k}\right]\right)T_2 s_n}-e^{\left(m-\left[\frac{m+1}{k}\right]\right)T_2 s_n}}{F(s_n)(1-e^{-kT_2 s_n})}\right\}\end{aligned} \tag{7-118}$$

特别地，若取 $m=k(m'+1)-1,\ m'=0,1,2,\cdots$，由上式便得

$$\Delta p_2^*(mT_2)=p_0\sum_{s_n}\frac{(1-e^{-T_2 s_n})e^{-(m+1)T_2 s_n}}{F(s_n)(1-e^{-T_2 s_n})}。 \tag{7-119}$$

这里，(7-118)式中$\left[\frac{m}{k}\right]$表示(m/k)的整数部分，余类推。

现在证明条件$p_2(0)=0$是成立的。事实上，根据拉普拉斯变换的第二展开定理，我们有

$$g(t)=\sum_{s_n}\mathrm{Res}\left(\frac{e^{st}}{\mathrm{ch}\,\lambda(s)l},\ s_n\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{-\alpha t}}{2LCl^2\beta_n}(2n+1)\pi(e^{\beta_n t}-e^{-\beta_n t})。$$

因此，显然$g(0)=0$，故$p_2(0)=p_1(0)\ g(0)=0$。

再根据Z-变换的反演公式，由(7-115)式、(7-117)式和(7-113)式便得

$$p_2^*(mT_2)=\lim_{N\to\infty}\frac{p_0}{2\pi i}\oint_{z_\infty}G_N^*(z)\frac{z^{m-1}}{1-z^{-k}}dz$$

$$=p_0\sum_{s_n}\frac{e^{mT_2s_n}\left[1-e^{-\left(\left[\frac{m}{k}\right]+1\right)T_1s_n}\right]}{F(s_n)(1-e^{-kT_2s_n})}。$$

特别，当$m=k(m'+1)-1\quad m'=0,1,2,\cdots$时，我们有

$$p_2^*(mT_2)=p_0\sum_{s_n}\frac{e^{mT_2s_n}\left[1-e^{-(m'+1)T_2s_n}\right]}{F(s_n)(1-e^{-kT_2s_n})} \tag{7-120}$$

利用上述公式(7-119)和(7-120)，就能计算出输出端以T_2为周期的冲击脉冲序列。

如果输入的脉冲频率恰好是管系的固有频率f_n，则此时的脉冲射流为共振冲击脉冲射流，称$T_n=\frac{1}{f_n}$为共振周期。如果取$T_1=T_n$，则可利用公式(7-119)和(7-120)分析共振冲击脉冲射流系统的输出特性。

习　题

1．用Z-变换法求解下述差分方程：

$$x(n+2)+2x(n+1)+x(n)=0,$$

已知：$x(0)=1, x(1)=0$。

2．用Z-变换法求解下述差分方程：

$$x(n+2)-3x(n+1)+2x(n)=\delta(0),$$

其中 $x(n)=0(n\leqslant 0$ 时)，并已知：

$$\delta(0)=1(n=0 \text{ 时}),\ \delta(n)=0(n<0, n>0 \text{ 时})。$$

3．用Z-变换法求解下述差分方程：

$$x'(t+T)+2x'(t)=5t,$$

已知：$x(0)=-1$。

4．已知系统的传输函数为 $H(p)=\dfrac{1}{p+a}$，式中 a 为常数，试求其冲击传输函数 $\mathscr{H}(z)$。

5．已知系统的传输函数 $H(p)$ 为

$$H(p)=\frac{1-e^{-p}}{p^2(p+1)},$$

试求其冲击传输函数 $\mathscr{H}(z)$。

6．已知系统的传输函数 $H(p)$为

$$H(p)=\frac{p}{(p+1)(p+3)},$$

试求其冲击传输函数 $\mathscr{H}(z)$。

7．已知系统的传输函数 $H(p)$为

$$H(p)=\frac{10p}{(p-1)(p-2)},$$

试求其冲击传输函数 $\mathscr{H}(z)$。

8．试证：对具有串联连接元件的脉冲系统，如图 7.12 所示，其冲击传输函数 $\mathscr{H}(z)$满足

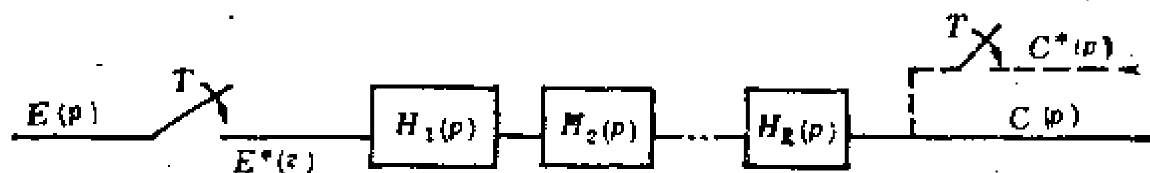


图 7.12

$$\mathscr{C}(z)=\mathscr{E}(z)\mathscr{H}(z)$$

且

$$\mathscr{H}(z)=z[H_1(p)\cdot H_2(p)\cdots H_k[p)]。$$

9．试证：对具有同步元件的脉冲系统，如图 7.13 所示，则其冲击传输函数 $\mathscr{H}(z)$满足

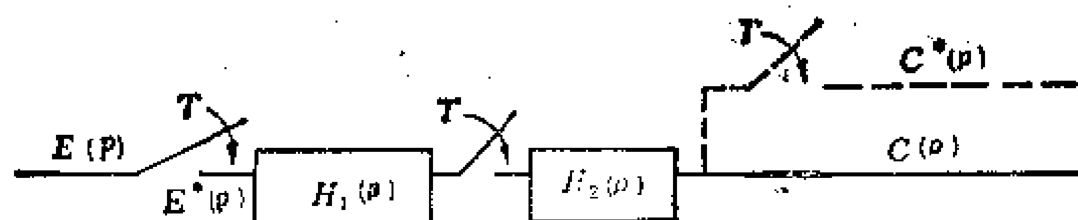


图 7.13

$$\mathscr{C}(z)=\mathscr{E}(z)\mathscr{H}(z),$$

且

$$\mathscr{H}(z)=\mathscr{H}_1(z)\cdot\mathscr{H}_2(z),$$

其中

$$\mathscr{H}_k(z)=Z[H_k(p)],\ k=1,2.$$

参 考 书 目 录

1. E. G. Phillips, Functions of A Complex Variable with Applications, London, 1957.

2. M·A· 拉夫连捷也夫, B·A· 沙巴特, 复变函数论方法,高等教育出版社, 1956 年。

3. 格·列·伦兹,列·埃·艾斯哥尔兹,复变函数与运算微积分初步,人民教育出版社, 1960 年。

4. J. B. Convey, Functons of One Complex Variable, Springer-Verlag, New York,1978.

5. 庄圻泰、张南岳, 复变函数, 北京大学出版社, 1984 年。

6. Karl J. Astrom, Introduction to Stochastic Control Theory, Acdemic Press, New York and London, 1970.

7. P. Henrici,Applied and Computational Complex Analysis,Vol. 2 Special Functions–Integral Transforms–Asymptotics–Continued Fractions, John Wiley & Sons, 1977.

8. A. David Wunsch, Complex Variables with Applications, Addison-Wesley Publishing Company, 1983.

9. Serge Lang, Cpmplex Analysis, Second Edition, Springer-Verlag, New York, Inc. 1985.

参考书目录

1. E. G. Phillips, Functions of A Complex Variable with Applications, London, 1957.
2. M·A· 拉夫连捷也夫, B·A· 沙巴特, 复变函数论方法,高等教育出版社, 1956 年。
3. 格·列·伦兹,列·埃·艾斯哥尔兹,复变函数与运算微积分初步,人民教育出版社, 1960 年。
4. J. B. Convey, Functons of One Complex Variable, Springer-Verlag, New York,1978.
5. 庄圻泰、张南岳, 复变函数, 北京大学出版社, 1984 年。
6. Karl J. Astrom, Introduction to Stochastic Control Theory, Acdemic Press, New York and London, 1970.
7. P. Henrici, Applied and Computational Complex Analysis, Vol. 2 Special Functions–Integral Transforms–Asymptotics–Continued Fractions, John Wiley & Sons, 1977.
8. A. David Wunsch, Complex Variables with Applications, Addison-Wesley Publishing Company, 1983.
9. Serge Lang, Cpmplex Analysis, Second Edition, Springer-Verlag, New York, Inc. 1985.